

5

OUTILS MATHÉMATIQUES

1 PRÉLIMINAIRES

Ce paragraphe résume les règles de base que doit observer le géomètre topographe.

1.1 Les croquis

Un lever de terrain doit s'accompagner d'un croquis clair, précis et lisible par une autre personne que le dessinateur l'ayant réalisé. Cela demande habileté et habitude. Notez que certains géomètres arrivent de plus en plus à travailler sans croquis de terrain grâce à l'introduction d'une codification des points levés et enregistrés sur un carnet de terrain. L'effort d'apprentissage d'une codification est rapidement rentabilisé par le gain de temps lors de la phase d'habillage d'un lever de détails (voir tome1, chapitre 8).

1.2 Le schéma général de calcul

Lors de calculs longs et fastidieux, il est très utile pour une éventuelle relecture ou correction de présenter un schéma général de calcul qui représente une sorte de table des matières de la note de calcul. L'ordre de présentation des calculs doit être l'ordre logique des résolutions numériques possibles. Cet ordre logique peut être issu de la construction géométrique. Cela est également valable pour les programmes informatiques (pour lesquels on commence par réaliser un organigramme) et les tableaux de calcul réalisés à l'aide d'un tableur.

1.3 La présentation des calculs

Pour être le plus lisible possible, une note de calcul doit utiliser une présentation en tableaux. Par exemple, le tableau suivant présente un calcul de distance entre des points donnés en coordonnées rectangulaires.

X_A (m)	Y_A (m)	X_B (m)	Y_B (m)	Delta X (m) $\Delta X = X_B - X_A$	Delta Y (m) $\Delta Y = Y_B - Y_A$	Distance AB (m) $D = (\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{1/2}$
13,32	15,46	45,47	46,65	32,15	31,19	44,79
12,32	09,45	54,42	48,63	42,10	39,18	57,51



La présentation des calculs introduit parfaitement le recours aux tableurs (calcul informatisé mis sous forme de tableaux) souvent utilisés dans cet ouvrage.

1.4 La présentation des résultats

Une note de calcul dans laquelle les résultats intermédiaires importants sont encadrés et dans laquelle on fait usage de couleurs est plus facile à suivre et à relire. On prendra soin, par exemple, d'utiliser dans les schémas des couleurs correspondant à celles du texte de la note de calcul.

1.5 La précision des résultats

Les résultats ne peuvent être plus précis que les données. En effet, si vous connaissez deux points en coordonnées au centimètre près, vous ne pourrez pas donner la distance entre ces points au millimètre près : c'est même une faute de raisonnement. Pour obtenir une précision donnée sur les résultats, deux cas de figure sont possibles :

- si vous effectuez une résolution graphique au moyen d'un logiciel de DAO ou si vous utilisez un logiciel de calcul, il suffit d'arrondir les résultats donnés (voir § 1.6.) ;
- si vous utilisez une calculatrice, pour éviter la perte de précision finale par cumul d'arrondis, il convient de garder au moins une décimale de plus dans les calculs. Certains calculs peuvent même demander de garder beaucoup plus de décimales dans les calculs intermédiaires : par exemple, un calcul faisant intervenir des puissances. La solution à ce problème est de stocker les valeurs intermédiaires dans les mémoires de la calculatrice (toute calculatrice moderne le permet) et de rappeler le contenu de ces mémoires pour des calculs ultérieurs.

Exemple : sur une calculatrice FX 850P programmable en BASIC standard,



2*cos12 [EXE] Calcul quelconque...

1,9646

Résultat affiché si la machine est en mode grades

A = [ANS] [EXE] Le résultat du calcul précédent est stocké dans la variable A

A / 3 [EXE]

A est réutilisée, sans arrondi, dans les calculs ultérieurs

0,6549

résultat affiché

Si la calculatrice ne possède pas cette possibilité, vous avez toujours la solution de noter au crayon un maximum de décimales derrière les décimales suffisantes et de les effacer une fois le calcul terminé.

1.6 Les arrondis

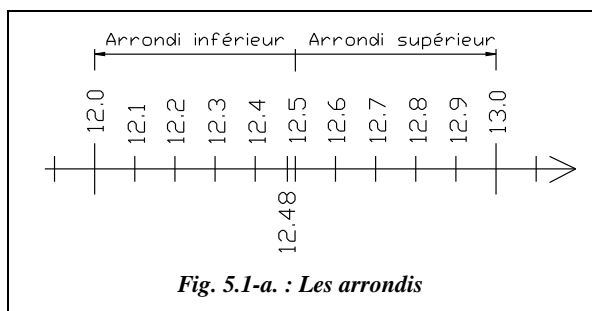
L'arrondi à $(n - 1)$ décimales de la valeur absolue d'un nombre de n décimales est réalisé comme suit (fig. 5.1-a.) :

- à la valeur inférieure quand la $(n + 1)^{\text{e}}$ décimale est 0, 1, 2, 3 ou 4 ;
- à la valeur supérieure quand la $(n + 1)^{\text{e}}$ décimale est 5, 6, 7, 8 ou 9.

Par convention, 12,5 s'arrondit à 13 de manière à équilibrer le nombre de décimales s'arrondissant au chiffre inférieur (12,0; 12,1; 12,2; 12,3 et 12,4) avec celui des décimales s'arrondissant au chiffre supérieur (12,5; 12,6; 12,7; 12,8 et 12,9). Cela est représenté sur le schéma de la figure 5.1-a. On constate qu'en fait 12,5 ne devrait pas être arrondi puisqu'il est aussi proche de 12,0 que de 13,0.

Attention à la difficulté suivante :

Si l'on arrondit un nombre une première fois (par exemple 12,48 arrondi à 12,5) puis une deuxième fois (12,5 s'arrondit à 13), on commet une erreur puisque 12,48 est plus proche de 12 que de 13. Il faut donc toujours revenir au nombre exact pour effectuer un arrondi.



Vérifiez que la calculatrice utilisée effectue cet arrondi à partir de l'exemple précédent ; la fonction d'arrondi se nomme souvent FIX ou TAB.

1.7 Les contrôles

Le contrôle des mesures doit être la philosophie de base du géomètre-topographe ; il consiste par exemple :

- à doubler les mesures sur le terrain pour permettre des recoupements,
- à vérifier les calculs faits par des constatations faisant appel à la logique ou bien par d'autres calculs ; même s'ils sortent d'un listing d'ordinateur, ces calculs peuvent donner des valeurs fausses ayant pour causes essentielles des erreurs humaines ;
- le dessin à l'échelle est aussi un excellent contrôle.

Dans des calculs menant à des résultats littéraux, le contrôle de l'homogénéité des formules est indispensable.

1.8 Les constructions géométriques

Autrefois, elles constituaient une vérification approximative des calculs pour éviter les erreurs grossières.

Elles permettaient également de trouver l'ordre logique d'enchaînement des calculs littéraux à partir de la construction graphique, avec cette restriction que la construction graphique fait appel à des notions de géométrie plane (ou dans l'espace) qui ne sont pas toujours simples à maîtriser. Les calculatrices étant rares, voire inexistantes, les problèmes étaient parfois résolus graphiquement.

Puis, l'emploi de calculatrices de plus en plus performantes a eu tendance à dévaloriser les résolutions graphiques.

Aujourd'hui, le rôle des constructions graphiques est essentiel puisque depuis l'avènement du Dessin Assisté par Ordinateur, elles permettent de résoudre les problèmes de manière visuelle avec, au minimum, la même précision que l'on obtiendrait sur une calculatrice. En effet, un ordinateur moyen actuel calcule avec une précision de 16 chiffres après la virgule et ce qu'il dessine à l'écran n'est que la visualisation graphique des calculs internes à la machine.

C'est pourquoi, dans cet ouvrage, il est fait une grande place aux résolutions graphiques qui sont un moyen de calcul de l'avenir, même si tout ne peut être calculé graphiquement.

Il est conseillé d'apprendre l'utilisation d'un logiciel de DAO pour mesurer toute la puissance de ce moyen de calcul qui présente le double avantage de limiter les erreurs possibles en permettant de visualiser directement le problème et, enfin, de fournir directement le report sur papier à toute échelle du problème traité.



Un exemple de résolution purement graphique est représenté sur la figure 5.1-b.

Soit à trouver le point d'intersection I de deux droites : l'une passant par les points A et B, l'autre par les points C et D, tous connus en coordonnées.

Environnement :

dans le menu FORMAT / CONTRÔLE DES UNITÉS, réglez le nombre de chiffres après la virgule à deux pour les longueurs.

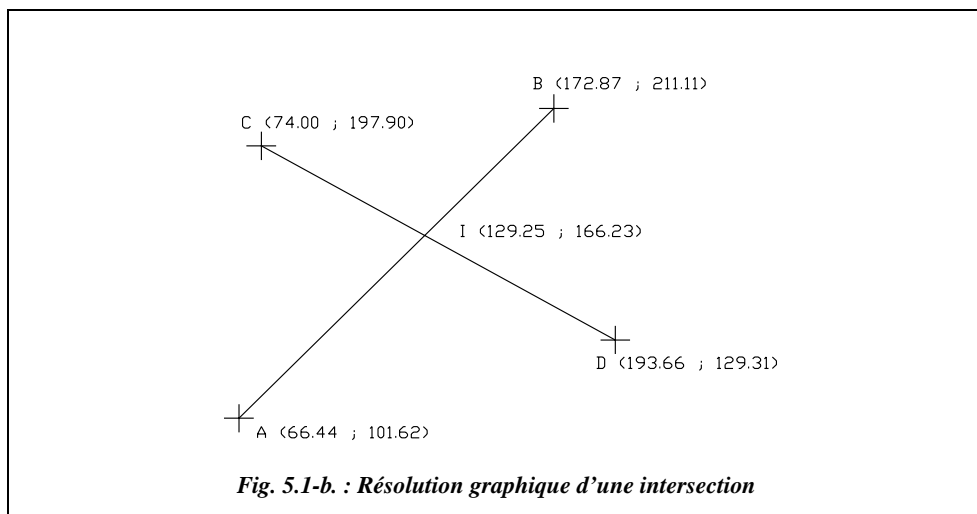
Dessin des droites AB et CD : entrez directement les coordonnées en repère général.
LIGNE ↵ du point 66.44,101.62 ↵ au point 172.87,211.11 ↵

Commande *LIGNE* ↵ du point 74.00,197.90 ↵ au point 193.66,129.31 ↵

Coordonnées du point d'intersection :

Commande *ID* ↵ avec l'accrochage objet *INT*ersection.

Résultat : I(129.25,166.23).



1.9 Les conventions littérales

Respecter les conventions littérales du métier est un gage de lisibilité accrue, même si ces dernières demandent souvent un nouvel apprentissage.

Dans cet ouvrage, les conventions préconisées par l'AFT¹ ont été respectées, à quelques exceptions près ; par exemple, la confusion fréquente entre z : angles zénithaux et Z : coordonnée ou altitude nous a amené à préférer la notation V pour les angles zénithaux.

1.10 L'informatique

L'informatique est un outil exceptionnel pour le topographe moderne : il faut absolument apprendre à le maîtriser. Mais attention : l'ordinateur n'est qu'un outil et ne fait donc que ce qu'on lui demande ; il vous appartient de rester critique devant ses résultats et devant ses possibilités. En effet, certains calculs ou reports peuvent être obtenus plus rapidement à la main ; seules les opérations répétitives ou fastidieuses donnent tout son sens à l'utilisation de l'outil informatique .



Parmi les apprentissages proposés dans cet ouvrage, le langage BASIC est abordé dans le seul but d'écrire de programmes pour les calculatrices programmables. Il n'est pas nécessaire d'en faire plus car il existe déjà des programmes

¹ Voir pour cela l'encart publié par la revue XYZ, n° 32-33, de 1988, intitulé *Système de symboles cohérents en topographie* ; il constitue l'introduction du *Lexique topographique* que l'Association Française de Topographie (AFT) a décidé de publier en 1987, et qu'il est conseillé de se procurer (voir la bibliographie).

performants écrits par des professionnels : il est préférable de se contenter d'en être de bons utilisateurs. De plus, dans un but réel de programmation, il existe aujourd'hui d'autres langages plus performants et conviviaux comme le langage Visual-Basic, le langage C, etc.

Remarque

Il existe des outils informatiques qui permettent à tous de calculer littéralement les plus complexes des intégrales ou dérivées, de résoudre numériquement toutes les équations possibles imaginables, à partir d'une interface graphique simple et conviviale. Le logiciel MATHCAD en est un exemple.

2 TRIGONOMÉTRIE

Ce paragraphe rappelle l'essentiel des relations trigonométriques utiles au topographe.

2.1 Cercle trigonométrique

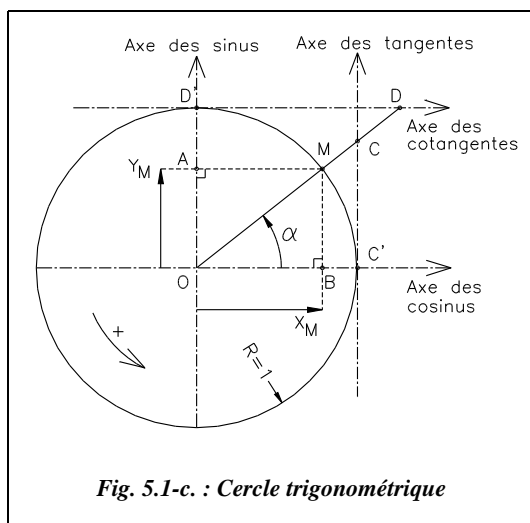


Fig. 5.1-c. : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique ci-contre (fig. 5.1-c.) est de rayon 1, c'est-à-dire : $R = OM = 1$.

En mathématique, le sens de rotation positif est dit trigonométrique et correspond au sens de rotation inverse horaire. Les angles sont exprimés en radians.

Par définition, le cosinus de l'angle α est la projection sur l'axe des abscisses x de l'extrémité du vecteur \overrightarrow{OM} , le sinus étant la projection sur l'axe des ordonnées y :

$$\cos \alpha = X_M, \text{ et } \sin \alpha = Y_M$$

On définit ensuite :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ et } \cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

♦ utilisation en topographie

Ces relations servent à calculer les éléments d'un triangle rectangle, par exemple le triangle OMA ou le triangle OMB de la figure 5.1-c. dont on connaît au moins deux

données : une longueur et un angle, ou bien deux longueurs. La connaissance de deux angles est insuffisante car il y a alors une infinité de solutions (voir paragraphe 3.3.4.).

On identifie les sinus, cosinus, tangente et cotangente de la manière suivante (fig. 5.2.) :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{MB}{OM}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{OB}{OM}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha} = \frac{MB}{OB}$$

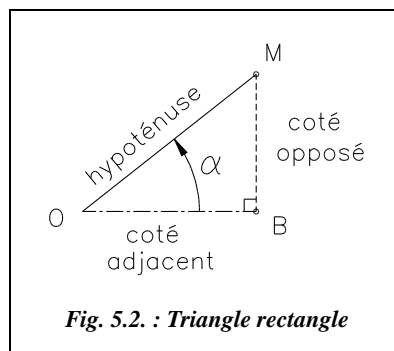


Fig. 5.2. : Triangle rectangle

Remarques

- La cotangente est l'inverse de la tangente

$$\cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$
 Son seul intérêt est la simplification de certaines formules littérales. Pour les calculs, la seule connaissance de la tangente est suffisante.
- Sur la calculatrice, la fonction cotangente n'apparaît généralement pas et s'obtient par **1/tan**, soit la combinaison de la fonction **tangente** suivie de la fonction **1/x** et **surtout pas** $\tan^{-1}()$ qui est la fonction réciproque de tan.
- **Attention** donc à ne pas confondre sur votre calculatrice la fonction $\tan^{-1}()$ avec la fonction cotangente ($1 / \text{tangente}$) ; $\tan^{-1}()$ représente la fonction (arc tangente) réciproque de (tangente) qui permet d'extraire l'angle α dont la tangente prend une certaine valeur X : $\tan^{-1} X = \alpha$ donc $X = \tan \alpha$, avec $X \in]-100, 100[$ gon.

Nous reviendrons au paragraphe 1.3. sur le fait que la solution de $\tan^{-1} X = \alpha$ ne donne que la racine comprise entre -100 et 100 gon. Il en est de même pour $\sin^{-1} X = \alpha$ (voir paragraphe 3.3.5.).

Application

Trouvez graphiquement sur le cercle trigonométrique puis vérifiez sur votre calculatrice que l'angle dont la tangente a pour valeur 1 est 50 gon.

2.2 Relations trigonométriques de base

Les relations suivantes sont utiles au déroulement de certains calculs littéraux :

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \end{array} \right\} \text{ Voir fig. 5.3.}$$

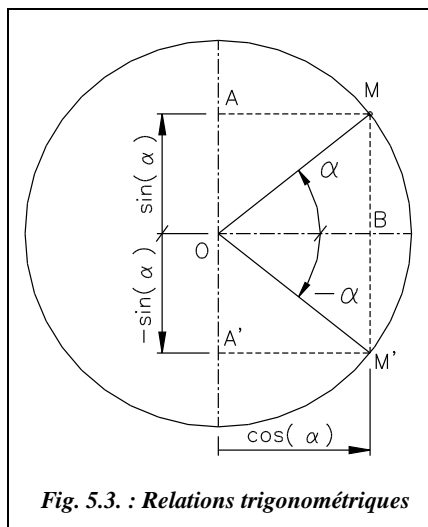


Fig. 5.3. : Relations trigonométriques

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

Application

1 - Donnez une expression simplifiée de $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

2 - Exprimez $\sin(a - b)$ et $\cos(a - b)$.

3 - Exprimez $\sin(2.a)$ et $\cos(2.a)$.

Réponse

$$1 - \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)}$$

$$2 - \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \text{ et } \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$3 - \cos(2.a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a \text{ et } \sin(2.a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

2.3 Identités remarquables

La figure 5.4. permet de retrouver les identités remarquables suivantes : on y représente un point M sur le cercle trigonométrique et sa projection sur les axes des sinus et cosinus, correspondant à l'angle α .

A partir de là, par symétries horizontales et verticales, on construit les projections correspondantes aux angles $100 - \alpha$, $100 + \alpha$, $200 - \alpha$, $200 + \alpha$, $300 - \alpha$, $300 + \alpha$, et $-\alpha$.

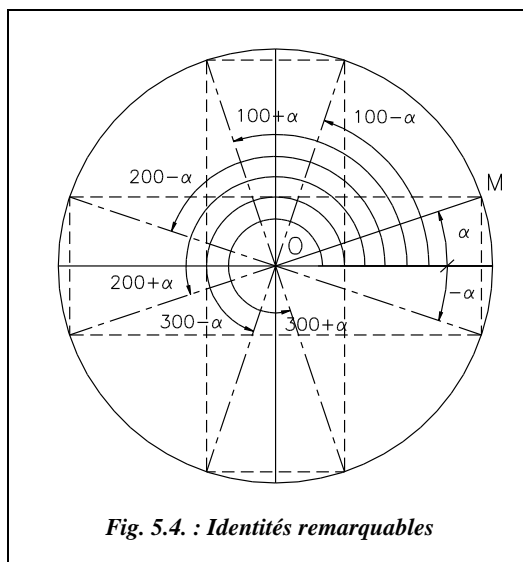


Fig. 5.4. : Identités remarquables

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\text{Donc : } \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\text{et } \cotan(-\alpha) = -\cotan \alpha$$

$$\sin(100 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(100 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + 100) = \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + 100) = -\sin \alpha$$

$$\sin(200 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(200 - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + 200) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 200) = -\cos \alpha$$

$$\sin(300 - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(300 - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(300 + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(300 + \alpha) = \sin \alpha$$

Application

Simplifier les expressions suivantes : $\tan(100 - \alpha)$; $\tan(100 + \alpha)$; $\tan(200 + \alpha)$

Réponses

$$\begin{aligned}\tan(100 - \alpha) &= \cotan \alpha ; \tan(100 + \alpha) = -\cotan \alpha = \tan(\alpha - 100) \\ \tan(200 + \alpha) &= \tan \alpha = -\tan(200 - \alpha)\end{aligned}$$

Remarque

Les identités remarquables précédentes permettent de soulever le problème suivant :

calculez sur votre calculatrice l'angle dont le sinus est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$; elle donne le résultat : 50 gon. Or cette solution n'est pas unique : l'angle $(200 - 50 = 150 \text{ gon})$ possède le même sinus puisque, comme démontré ci-dessus, $\sin(200 - \alpha) = \sin \alpha$. La fonction **sin⁻¹** () (**arc sinus**, notée **asin**) des calculatrices est programmée pour ne donner qu'une seule des deux racines possibles, celle qui est comprise entre -100 et 100 gon. Cela peut entraîner des erreurs de résolution car, dans certains cas, c'est l'autre racine qui correspond au problème à résoudre (voir § 3.3.5). Le même problème se pose avec la fonction **tan⁻¹** () puisque $\tan(200 + \alpha) = \tan \alpha$.

Donc attention : chaque fois que vous utilisez ces deux fonctions, des vérifications s'imposent, soit sous forme de double calcul, soit sous forme de schéma pour choisir la racine possible.

Notez que ce problème ne se pose pas pour la fonction **cos⁻¹** () puisque si la première racine possible est α compris entre 0 et 200 gon, la seconde racine possible est $-\alpha$ qui est négative puisque $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$. Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans ce cas et il est toujours préférable d'utiliser **cos⁻¹** () plutôt que **sin⁻¹** () ou **tan⁻¹** ().

2.4 Relations diverses

2.4.1 Développements limités

Pour a proche de zéro, on a : $(1 + a)^n \approx 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^3 + \dots$

Pour α proche de 0 radians, on peut écrire : $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

$$\tan \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \dots$$

2.4.2 Dérivées

Les relations suivantes ne sont exactes que pour un angle α exprimé en radians.

$$\sin' \alpha = \cos \alpha ; \cos' \alpha = -\sin \alpha ; \tan' \alpha = 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} .$$

$$\arcsin' \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \text{ et } \arctan' \alpha = \frac{1}{1 + \alpha^2} .$$

Si l'angle α est exprimé en gon, il faut donc le transformer en radians avant d'utiliser ces formules. Elles deviennent dans le cas d'un angle α exprimé en gon :

$$\sin' \alpha_{\text{gon}} = \frac{\pi}{200} \cdot \cos \alpha_{\text{gon}} \quad \cos' \alpha_{\text{gon}} = -\frac{\pi}{200} \cdot \sin \alpha_{\text{gon}} \quad \text{etc.}$$

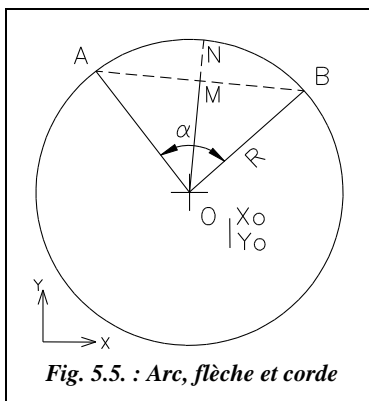
2.4.3 Paramétrages

Si l'on pose $t = \tan(\alpha / 2)$, on obtient les expressions paramétrées suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2} ; \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} ; \tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2} .$$

3 PROPRIÉTÉS DU CERCLE

Ce paragraphe contient une liste non exhaustive des principales propriétés du cercle utilisées en topographie.



3.1 Équation

En topographie, on utilise rarement le cercle en faisant référence à son équation. Rappelons toutefois que l'équation d'un cercle de centre O (X_0 , Y_0) et de rayon R (fig. 5.5.) est :

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2$$

3.2 Arc, flèche, corde

On peut faire l'analogie avec l'arc d'un archer (voir fig. 5.5.)

- On appelle **arc** la partie circulaire AB, notée \widehat{AB} , d'angle au centre α .

- On appelle **corde** la longueur du segment [AB].
- On appelle **flèche** la longueur du segment [MN].

Les relations entre ces éléments sont les suivantes :

$$\begin{aligned} AB &= 2R \cdot \sin(\alpha/2) \\ MN &= R - R \cdot \cos(\alpha/2) \\ \widehat{AB} &= R \cdot \alpha_{radian} = R \frac{\pi}{200} \alpha_{gon} \end{aligned}$$

Application

Calculez l'arc, la corde et la flèche interceptés par un angle au centre de 50 gon dans un cercle de rayon 15,00 m.

Réponses

Arc = 11,78 m ; corde = 11,48 m ; flèche = 1,14 m.

3.3 Théorie des arcs capables

3.3.1 Angle entre corde et tangente

L'angle entre la corde AB et la tangente au cercle en A (ou en B) vaut $\alpha/2$ (fig. 5.6.).

Démonstration : le triangle AOB étant isocèle, on en déduit que $\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \frac{200 - \alpha}{2} = 100 - \frac{\alpha}{2}$. La tangente en A au cercle étant perpendiculaire au rayon AO, il vient que l'angle entre la tangente et la corde est $\alpha/2$. Le même raisonnement s'applique en B.

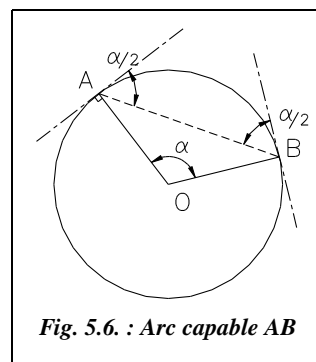


Fig. 5.6. : Arc capable AB

3.3.2 Angle vu depuis le cercle et angle au centre

L'angle \widehat{ANB} est appelé angle du cercle interceptant l'arc AB (fig. 5.7.).

L'angle \widehat{AOB} est l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Il existe entre ces deux angles la relation

$$\widehat{ANB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$$

Démonstration : le rayon ON est perpendiculaire à la tangente tt'.

Autour de O, on a : $\widehat{AOB} = \alpha = 400 - (\alpha_1 + \alpha_2)$

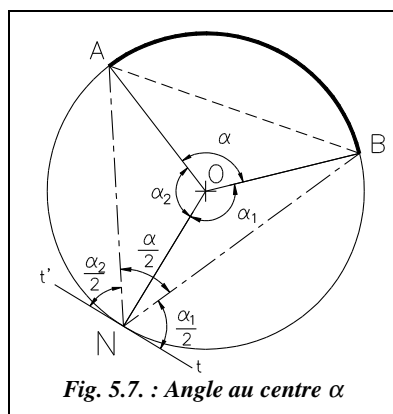


Fig. 5.7. : Angle au centre α

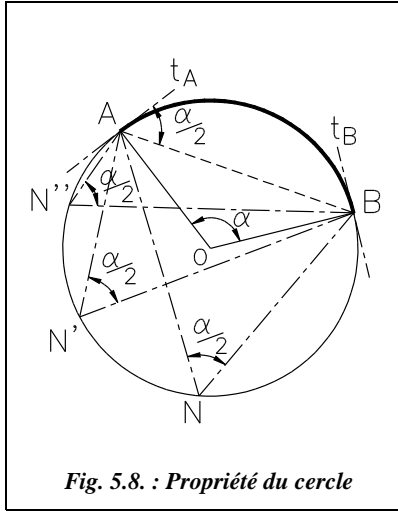


Fig. 5.8. : Propriété du cercle

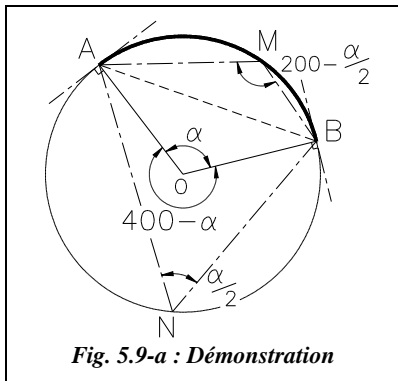


Fig. 5.9-a : Démonstration

Autour de N, on a : $\widehat{ANB} = 200 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$

Cette démonstration est indépendante de la position du point N, situé sur l'arc complémentaire de AB. Donc tout point N de l'arc extérieur à l'arc AB intercepté par l'angle au centre α vérifie la relation précédente (voir fig. 5.8.).

Les angles issus de points situés sur un cercle et interceptant un même arc de ce cercle sont égaux entre eux et égaux à la moitié de l'angle au centre.

On constate aussi sur la figure 5.8., que lorsque N tend vers A (ou B), l'angle en N tend à devenir l'angle entre corde et tangente dont nous avons déjà démontré au paragraphe 2.3.1. qu'il vaut $\alpha/2$.

On peut en déduire, pour tout point M de l'arc AB que (fig. 5.9-a.) :

$$\widehat{AMB} = 200 - \frac{\widehat{AOB}}{2} = 200 - \frac{\alpha}{2} = 200 - \widehat{ANB}$$

Démonstration :

L'angle complémentaire à l'angle α intercepte l'arc complémentaire de l'arc AB intercepté par l'angle α . Donc l'angle au point M interceptant ce même arc complémentaire a pour valeur : $(400 - \alpha) / 2 = 200 - \alpha / 2$.

3.3.3 Arc capable

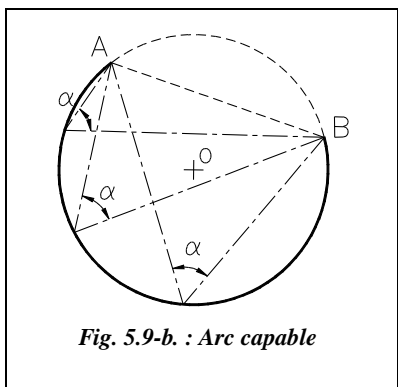


Fig. 5.9-b. : Arc capable

Soient deux points fixés A et B. L'ensemble des points N tels que l'angle \widehat{ANB} soit égal à une valeur donnée α est représenté par l'arc AB (en trait continu sur la figure 5.9-b.). Cet arc est appelé arc capable associé à l'angle α .

3.4 Puissance d'un point par rapport à un cercle

La puissance du point A par rapport au cercle (C), de centre O et de rayon R, est par définition le produit (AM.AN). Ce produit est constant et indépendant de la droite (D) issue du point A et sécante au cercle (C) (fig. 5.10.).

La puissance de A par rapport à (C) est : $AM.AN = (d^2 - R^2)$.

d représente la distance OA.

Démonstration :

$$AM = AH - HM$$

$$AN = AH + HN$$

$$AM \cdot AN = AH^2 + AH \cdot (HN - HM) - HM \cdot HN$$

$$AH^2 = d^2 - OH^2$$

$$HM = HN$$

$$R^2 = OH^2 + HM^2$$

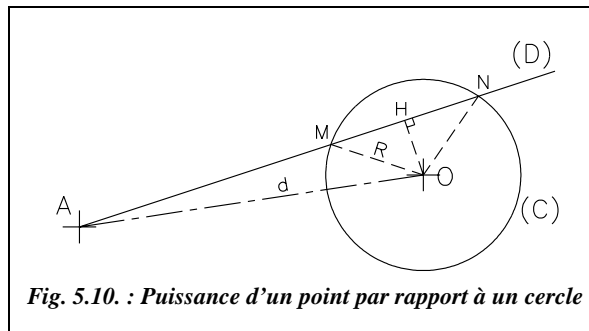


Fig. 5.10. : Puissance d'un point par rapport à un cercle

On obtient donc, après simplifications : $AM \cdot AN = d^2 - R^2$. Cela est vrai pour toute droite (D) issue du point A et sécante au cercle (C).

3.5 Cercles homothétiques

Soient deux droites (SA) et (SB) concourantes au sommet S (fig. 5.11.). On cherche le cercle (C') tangent intérieurement à ces deux droites et passant par le point P'.

Le point P' est donné par les cotes ST_1 et T_1P' . On connaît le sommet S et l'angle α .

On fait intervenir le cercle de rayon R et de centre O tel que le point O soit sur le prolongement de T_1P' (cercle tangent à SB en T_1).

Dans les triangles SPO et $SP'O'$, on peut

$$\text{écrire : } \frac{SP}{SP'} = \frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'}.$$

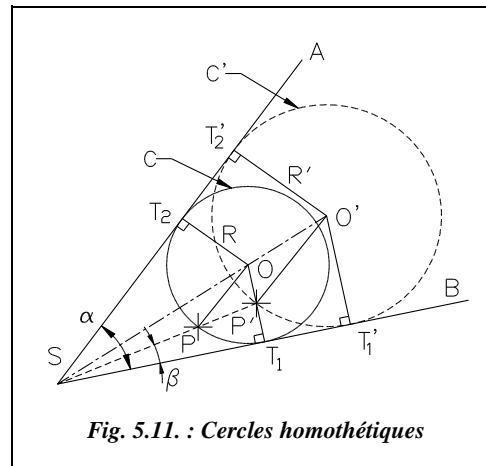


Fig. 5.11. : Cercles homothétiques

Dans les triangles semblables ST_1O et $ST_1'O'$, on peut écrire : $\frac{SO'}{SO} = \frac{ST_1}{ST_1'} = \frac{R'}{R}$.

Comme $\sin(\widehat{SPO}) = \frac{\sin(\widehat{PSO})}{R} SO = \frac{\sin(\widehat{PSO})}{R'} SO' = \sin(\widehat{SP'O'})$, on peut dire que les segments $[OP]$ et $[O'P']$ sont parallèles : on dit que le cercle (C) est homothétique du cercle (C'), homothétie de centre S.

On en déduit $R = ST_1 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $SO = ST_1 / \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et β tel que $\tan\beta = \frac{T_1P'}{ST_1}$.

Il reste à résoudre le triangle SPO dont on connaît un angle et deux côtés (voir § 4.3.5.).

Cet exercice est résolu à l'aide d'une autre méthode au paragraphe 5.6. du chapitre 4.

4 RELATIONS DANS LES TRIANGLES

4.1 Relations de base

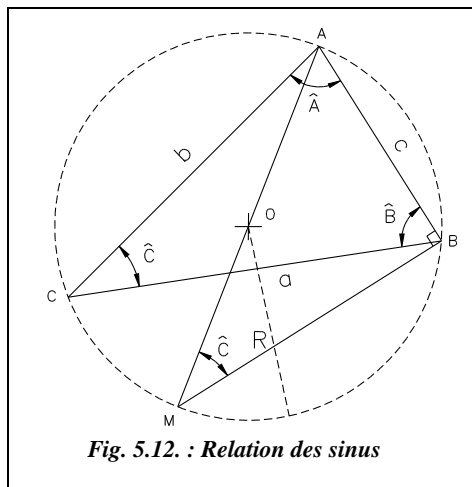


Fig. 5.12. : Relation des sinus

Seules les plus utilisées sont étudiées.

La notation ci-contre (fig. 5.12.) est toujours respectée : le côté de longueur a est opposé à l'angle \widehat{A} , b opposé à l'angle \widehat{B} et c à l'angle \widehat{C} .

4.1.1 Somme des angles Internes

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 200 \text{ gon}$$

4.1.2 Relation des sinus

Soit le triangle ABC ci-dessus (fig. 5.12.) inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R . Si l'on fait intervenir le triangle ABM tel que la droite AM passe par le centre O du cercle, on retrouve en M l'angle \widehat{C} puisque les angles \widehat{ACB} et \widehat{ABM} interceptent la même corde AB (voir § 3.3.2.).

De plus, l'angle \widehat{ABM} est égal à 100 gon (c'est le cas particulier du paragraphe 3.3.2. où l'angle γ est égal à 100 gon).

Donc dans le triangle rectangle ABM, on a $\sin \hat{C} = \frac{c}{2R}$.

Cette relation peut se démontrer pour chaque côté du triangle et comme la quantité $2R$ est une constante, on en déduit la relation des sinus exprimée ci-contre :

$$2R = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Le cercle de rayon R est appelé cercle circonscrit au triangle ABC.

4.1.3 Relation des cosinus

Dans le même triangle ABC (fig. 5.13.), si l'on trace la perpendiculaire à AB passant par C (hauteur), on peut écrire :

$$c = a \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{A}$$

De même, sur les autres côtés, on obtient :

$$\begin{aligned} b &= c \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{C} \\ a &= b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B} \end{aligned}$$

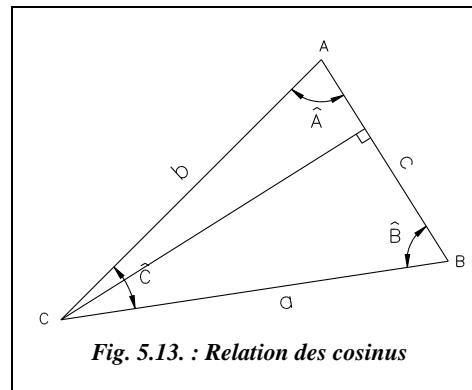


Fig. 5.13. : Relation des cosinus

4.1.4 Théorème de Pythagore généralisé

Dans le triangle ABC (fig. 5.14.), on peut écrire la relation vectorielle suivante : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

Si l'on en fait le produit scalaire membre à membre, on obtient : $\vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC})$.

En distribuant, il vient :

$$AC^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + BC^2.$$

En écrivant le produit scalaire, il vient :

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\vec{AB} \cdot \vec{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos(200 - \hat{B}) = -AB \cdot BC \cdot \cos \hat{B}$$

On obtient finalement :

On démontre de même que :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos \hat{C}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos \hat{A}$$

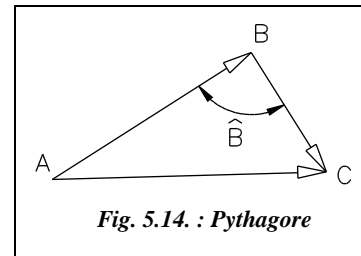


Fig. 5.14. : Pythagore

4.1.5 Relation des tangentes

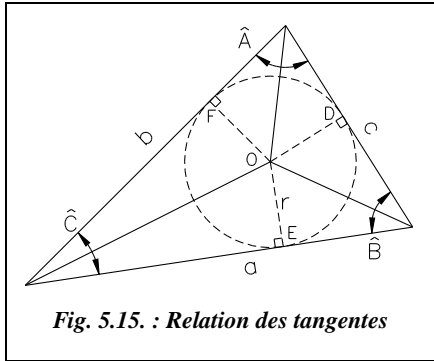


Fig. 5.15. : Relation des tangentes

Considérons le cercle de rayon r inscrit dans le triangle ABC . Soient D , E et F les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés du triangle (fig. 5.15.). On peut écrire :

$$c = BD + DA$$

$$a = BE + EC$$

$$b = AF + FC$$

Comme $AD = AF$, $CF = CE$ et $BE = BD$, on obtient :

$$a + b + c = 2.(BD + AF + CE).$$

On pose $p = \frac{a + b + c}{2}$; p est appelé demi-périmètre. On en déduit que :

$$AD = AF = p - BD - CE = p - a$$

$$BD = BE = p - AF - CE = p - b$$

$$CE = CF = p - BD - AF = p - c$$

De plus : $r = AF \cdot \tan(\hat{A}/2) = BD \cdot \tan(\hat{B}/2) = CE \cdot \tan(\hat{C}/2)$.

Donc :

$$r = (p - a) \cdot \tan(\hat{A}/2) = (p - b) \cdot \tan(\hat{B}/2) = (p - c) \cdot \tan(\hat{C}/2)$$

$$\text{avec } p = \frac{a + b + c}{2}$$

4.1.6 Relations faisant intervenir le cercle exinscrit

Le cercle centré au point O' est appelé cercle exinscrit au triangle ABC et associé à l'angle \hat{A} . On note son rayon R_a . Ce cercle est tangent à la base a et aux côtés AC et AB mais sur ces deux derniers, les points de tangence sont à l'extérieur du triangle (fig. 5.16.).

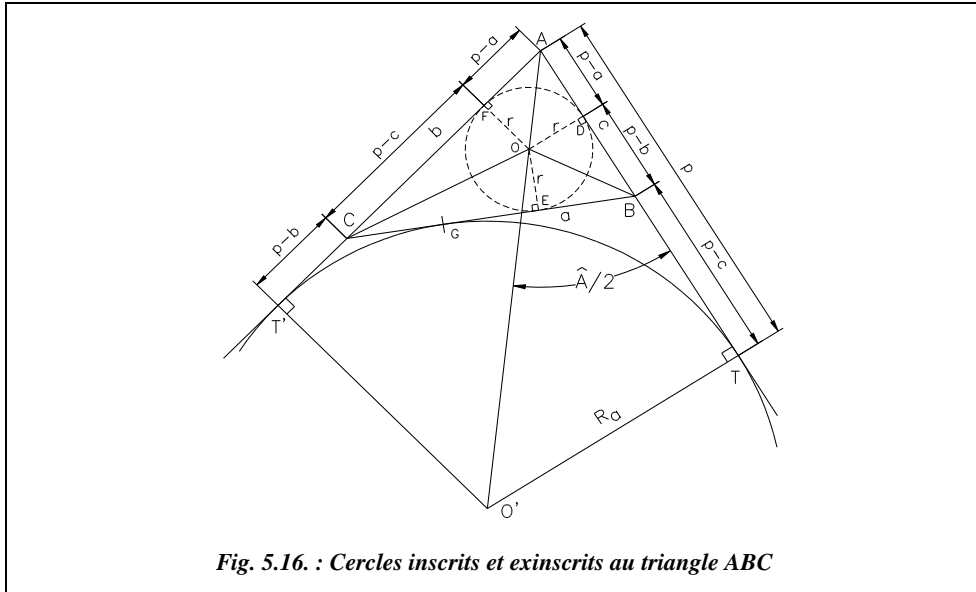
Il existe donc trois cercles exinscrits par triangle. Nous n'étudions qu'un seul cas, les autres relations en sont déduites par permutation d'indice.

On peut écrire que :

$$\tan(\hat{A}/2) = \frac{R_a}{p} = \frac{r}{p - a}$$

Démonstration : cela revient à démontrer que : $AT = AT' = p$.

$$AT = AT' \text{ donc } 2 \cdot AT = AT + AT' \quad \text{or } 2 \cdot AT = (AB + BT) + (AC + CT').$$



On fait intervenir G, point de tangence entre le segment BC et le cercle exinscrit :

$2 \cdot AT = (AB + BG) + (AC + CG)$ puisque $BG = BT$ et $CG = CT'$.

Donc $2 \cdot AT = AB + (BG + CG) + AC = AB + AC + BC$.

Finalement, $2 \cdot AT = 2 \cdot p$ d'où $AT = AT' = p$.

4.2 Surface d'un triangle

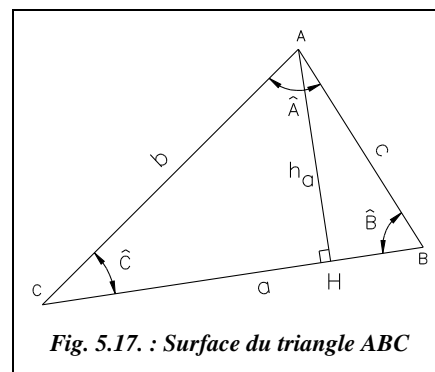
4.2.1 Surface d'un triangle à partir de la hauteur du triangle

La surface totale S du triangle ABC (fig. 5.17.) est la somme des surfaces des triangles AHC et AHB. Soit :

$$S = \frac{h_a \cdot CH}{2} + \frac{h_a \cdot BH}{2}$$

$$S = \frac{h_a}{2}(CH + BH)$$

Donc : $S = \frac{ah_a}{2}$



La formule peut être écrite de même avec h_b et h_c , les hauteurs perpendiculaires aux côtés b et c .

4.2.2

Surface d'un triangle à partir du produit vectoriel

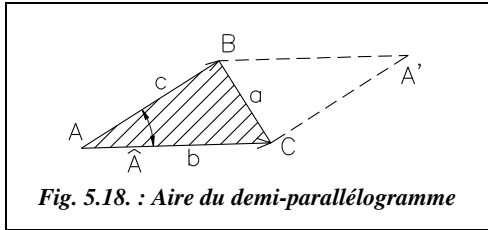


Fig. 5.18. : Aire du demi-parallélogramme

C'est la formule la plus employée (fig. 5.18.). La surface du parallélogramme A-B-A'-C s'exprime comme la norme du produit vectoriel des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

La surface totale du parallélogramme est : $S_t = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin A$

Donc : $S_t = b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$.

La surface S du triangle ABC est la moitié de la surface totale :

$$S = \frac{bc \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{ab \cdot \sin \hat{C}}{2} = \frac{ac \cdot \sin \hat{B}}{2}$$

4.2.3

Surface d'un triangle à partir du rayon du cercle inscrit ou du rayon du cercle exinscrit

La surface totale peut être considérée comme la somme des surfaces des triangles ADO, AFO, BDO, BEO, CEO et CFO (fig. 5.15.), donc :

$$S = \frac{rAC}{2} + \frac{rAF}{2} + \frac{rBC}{2} + \frac{rBE}{2} + \frac{rCE}{2} + \frac{rCF}{2} = \frac{r}{2} \cdot (AC + BC + BE + CE + AF + CF) = rp$$

En rapprochant ce résultat de celui du paragraphe 4.1.6., on obtient :

$$S = pr = (p - a) \cdot R_a = (p - b) \cdot R_b = (p - c) \cdot R_c$$

4.2.4

Surface d'un triangle à partir du demi-périmètre p

Si l'on connaît les trois côtés d'un triangle, sa surface s'exprime par :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Démonstration : le raisonnement est mené à partir de la figure 5.17.

$$S = \frac{bc}{2} \cdot \sin \hat{A} \text{ d'où } \sin \hat{A} = \frac{2S}{bc} ;$$

$$\text{et } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \text{ d'où } \cos \hat{A} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} ;$$

$$\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1 \text{ d'où } 16S^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2 = (2bc)^2 \text{ et } 16S^2 = (2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$$

En factorisant, on obtient : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4.2.5 Surface d'un triangle à partir du rayon du cercle circonscrit

Le cercle circonscrit de rayon R et de centre O passe par les trois sommets du triangle ABC (fig. 5.19.) dont la surface vaut :

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Démonstration :

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$2.S_{OAB} = R^2 \cdot \sin(2.\hat{C})$$

$$2.S_{OAC} = R^2 \cdot \sin(2.\hat{B})$$

$$2.S_{OBC} = R^2 \cdot \sin(2.\hat{A})$$

$$2.S_{ABC} = R^2 \cdot [\sin(2.\hat{A}) + \sin(2.\hat{B}) + \sin(2.\hat{C})]$$

$$\sin(2.\hat{A}) + \sin(2.\hat{B}) = 2.\sin(\hat{A} + \hat{B}).\cos(\hat{A} - \hat{B})$$

$$\sin(2.\hat{C}) = \sin(400 - 2.\hat{A} - 2.\hat{B})$$

$$= -\sin[2.(\hat{A} + \hat{B})]$$

$$= -2.\sin(\hat{A} + \hat{B}).\cos(\hat{A} + \hat{B})$$

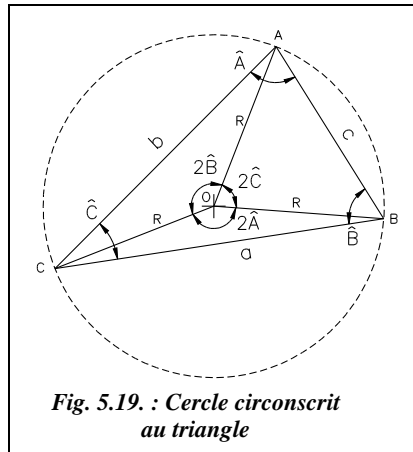


Fig. 5.19. : Cercle circonscrit au triangle

Donc : $\sin(2.\hat{A}) + \sin(2.\hat{B}) + \sin(2.\hat{C}) = 4.\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}$ en remarquant que $\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin\hat{C}$

$$S_{ABC} = 2.R^2.\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C} = 2R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

4.2.6 Surface d'un triangle à partir d'un côté et des deux angles adjacents

La surface S est décomposée en deux surfaces par la hauteur CH (fig. 5.20.). On peut alors écrire :

$$S = \frac{hc}{2} \text{ de plus } \cotan\hat{A} = \frac{x}{h} \text{ et } \cotan\hat{B} = \frac{y}{h}$$

$$\cotan\hat{A} + \cotan\hat{B} = \frac{x+y}{h} = \frac{c}{h} = \frac{c^2}{2S}$$

Donc :

$$S = \frac{c^2}{2(\cotan\hat{A} + \cotan\hat{B})}$$

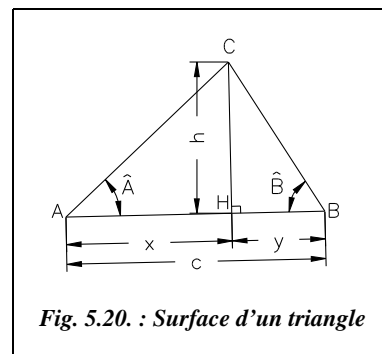
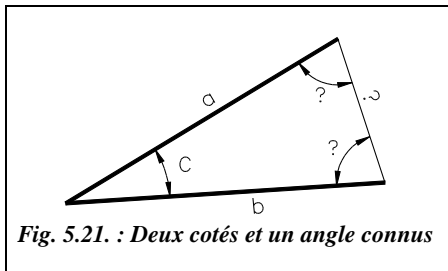


Fig. 5.20. : Surface d'un triangle

4.3 Résolution de triangles

Pour alléger les notations, on note A , B et C les angles opposés aux côtés a , b et c .

4.3.1 Un angle C et ses deux côtés adjacents a et b sont connus



Calcul de c : $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Calcul de A : $a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$

ou bien : $b = a.\cos C + c.\cos A$

Calcul de B : $b^2 = a^2 + c^2 - 2.c.a.\cos B$

ou bien : $a = b.\cos C + c.\cos B$

Cette solution est unique.

On vérifie que $A + B + C = 200$ gon.

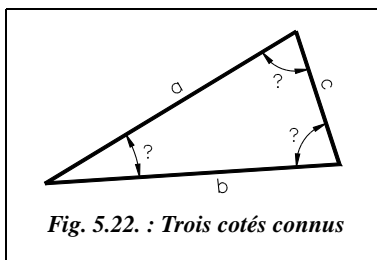
Exemple

$C = 28,654$ gon ; $a = 151,46$ m ; $b = 212,28$ m.

Résultats

$c = 100,52$ m ; $A = 45,513$ gon ; $B = 125,833$ gon ; $S = 6\,993,8798$ m².

4.3.2 Les trois côtés a , b et c sont connus



Calcul de C : $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Calcul de A : $a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$

ou bien : $b = a.\cos C + c.\cos A$

Calcul de B : $b^2 = a^2 + c^2 - 2.c.a.\cos B$

ou bien : $a = b.\cos C + c.\cos B$

Cette solution est unique.

On vérifie que $A + B + C = 200$ gon.

Exemple

$a = 151,46$ m ; $b = 212,28$ m ; $c = 98,45$ m.

Résultats

$C = 27,704$ gon ; $A = 44,926$ gon ; $B = 127,370$ gon ; $S = 6\,777,1145$ m².

4.3.3 Un côté b et les deux angles adjacents C et A sont connus

Calcul de B : $A + B + C = 200$ gon

Calcul de a et c :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cette solution est unique.

On vérifie que $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$.

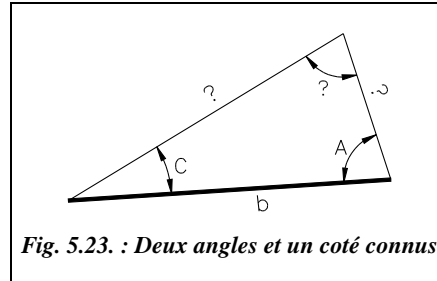


Fig. 5.23. : Deux angles et un côté connus

Exemple

$b = 151,46$ m ; $A = 44,926$ gon ; $C = 34,343$ gon.

Résultats

$B = 120,731$ gon ; $a = 103,68$ m ; $c = 82,12$ m ; $S = 4033,2002$ m².

4.3.4 Les trois angles A , B et C sont connus

Ce cas admet une infinité de solutions qui sont des triangles homothétiques. La figure ci-contre représente deux triangles homothétiques (fig. 5.24.).

Pour obtenir une seule solution, il faut connaître l'un des côtés.

Cela revient à la résolution du paragraphe 4.3.3.

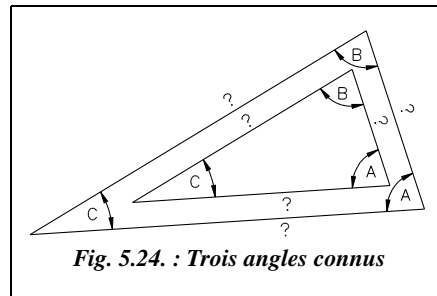


Fig. 5.24. : Trois angles connus

Exemple

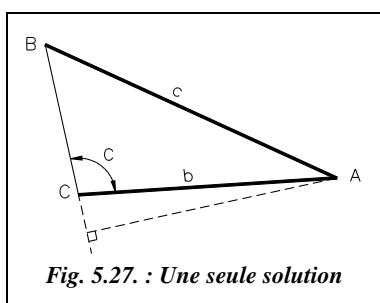
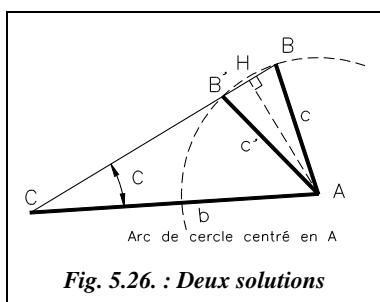
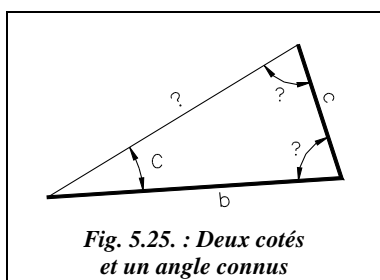
$A = 44,926$ gon ; $B = 120,731$ m ; $C = 34,343$ gon ; $a = 91,46$ m.

Résultats

$b = 133,61$ m ; $c = 72,44$ m.

4.3.5 Un angle C , un côté adjacent b et le côté opposé c sont connus

Ce cas est appelé cas douteux car il peut admettre zéro, une ou deux solutions. Nous discuterons graphiquement de l'existence de ces solutions.



◆ **Si $C < 100$ gon (fig. 5.26.)**

Si $c < AH$, il n'y a pas de solution possible car c est « trop court ».

Si $c = AH$, il existe une solution unique qui correspond au triangle CAH rectangle en H, car $AH = b \cdot \sin C$.

Si $c > AH$, il existe deux solutions possibles du point B puisque le cercle de centre A et de rayon c coupe la droite (CB) issue du point C en 2 points B et B'. Si l'on poursuit l'augmentation de la valeur du côté c jusqu'à atteindre la valeur b , on se retrouve dans un cas limite à partir duquel il n'y a plus qu'une seule solution possible puisqu'il n'y a plus qu'une seule intersection possible entre la droite (CB) et le cercle de centre A et de rayon c .

◆ **Si $C > 100$ gon (fig. 5.27.)**

La seule possibilité pour qu'il y ait une solution au problème est que $c > b$.

Si $b = c$, le triangle est limité à une seule droite, ce qui ne correspond pas à un problème réel.

Si $c < b$, il n'y a pas de solution possible : c est « trop court ».

Tableau récapitulatif

$C < 100$ gon		$C > 100$ gon	
$c < b \cdot \sin C$	aucune solution	$c \leq b$	aucune solution
$c = b \cdot \sin C$	une solution	$c > b$	une solution
$b \cdot \sin C < c < b$	deux solutions		
$c > b$	une solution		

Résolution

L'angle B est déterminé dans l'expression $c / \sin C = b / \sin B$.

Si $b \cdot \sin C < c$, ceci donne deux solutions B et B' :

$$\begin{cases} B = \sin^{-1}\left(\frac{b \cdot \sin C}{c}\right) \\ B' = 200 - B \end{cases}$$

On calcule l'angle A par : $A + B + C = 200$ gon

On calcule la côté a par : $a / \sin A = c / \sin C$

On vérifie que $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$.

Le calcul de A' est identique.

Le calcul de a' est identique.

Exemple

$c = 191,46$ m ; $b = 212,28$ m ; $C = 71,002$ gon.

Résultats

$C < 100$ gon et $b > c > b \cdot \sin C = 190,64$ m, donc il y a deux solutions.

Première solution : $B = 94,092$ gon ; $A = 34,906$ gon ; $a = 111,13$ m.

Seconde solution : $B' = 105,908$ gon ; $A' = 23,090$ gon ; $a' = 75,64$ m.

4.3.6 Résolution graphique



L'environnement de travail est défini dans le menu **FORMAT / CONTROLE DES UNITES** : zéro des angles au nord, sens de rotation horaire, angles en grades avec trois chiffres significatifs, longueurs en unités décimales avec deux chiffres significatifs.

Droite CA : **LIGNE** d'un point quelconque à **@212.28<100**

Droite CB : **LIGNE** depuis le point C (utilisez l'accrochage **EXTrémité**) à **@200<-371.002**

Position de la droite AB : **CERCLE** de centre le point A (utilisez l'accrochage **EXTrémité**) et de rayon **191.46**

Droites AB possibles : tracez deux lignes depuis le centre du cercle jusqu'aux deux points d'intersection du cercle et de la droite CB .

Il reste à mesurer les deux longueurs possibles CB et CB' avec la commande **DISTANCE** et les angles A , A' , B et B' par exemple avec des cotations angulaires (menu **COTATION / ANGULAIRE**).

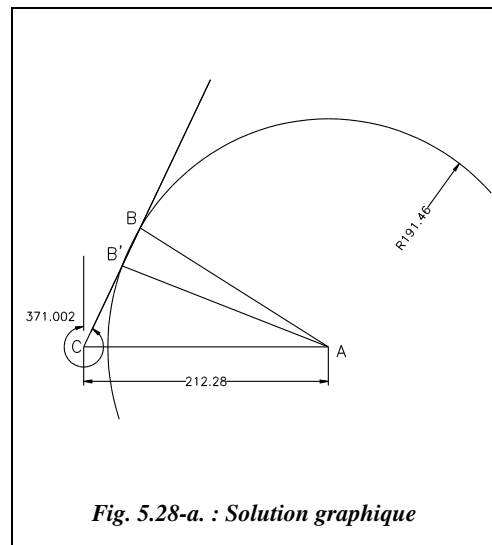


Fig. 5.28-a. : Solution graphique

4.3.7 Programmation en basic standard de la résolution de triangles



Le programme suivant regroupe les quatre cas de figure possibles de la résolution d'un triangle. Il est donné en BASIC standard (avec les numéros de ligne) pour être adapté aux calculatrices programmables.

Trois données sont nécessaires. Les variables contenant les angles sont notées AA, AB et AC. Celles qui contiennent les cotés sont notées CA, CB, CC. Par convention, le côté CA est opposé à l'angle AA.

```

1 PRINT "Résolution de triangles"
2 INPUT "(1)ABc (2)abc (3)abC (4)abA"; NU
3 ON NU GOTO 10, 100, 200, 300
4 END
5 REM On connaît un côté et deux angles adjacents
10 INPUT "Côté c (m) "; CC
20 INPUT "Angle A (gon)"; AA
30 INPUT "Angle B (gon) "; AB
40 AC = 200 - AA - AB : REM Calcul direct de l'angle C
50 CB = CC / SIN(AC) * SIN(AB) : REM Calcul direct du côté b
60 CA = CC / SIN(AC) * SIN(AA) : REM Calcul direct du côté a
80 PRINT "Angle C : "; AC ; "gon" : REM Affichage des résultats
90 PRINT "Côté b : "; CB ; " m"
95 PRINT "Côté a : "; CA ; " m" : END
99 REM Trois cotés connus
100 INPUT "Côté a (m) "; CA
120 INPUT "Côté b (m) "; CB
130 INPUT "Côté c (m) "; CC
140 AA = ARCCOS((CC^2+CB^2-CA^2)/(2*CC*CB))
145 IF AA < 0 THEN AA=AA+200 : REM si A négatif, ajouter 200 gon
150 AB = ARCCOS((CA^2+CC^2-CB^2)/(2*CA*CC))
160 IF AB < 0 THEN AB=AB+200 : REM si B négatif ajouter 200 gon
180 PRINT "Angle A : "; AA ; "gon"
190 PRINT "Angle B : "; AB ; "gon"
195 PRINT "Angle C : "; 200 - AA - AB ; "gon" : END
199 REM un angle et deux côtés adjacents connus
200 INPUT "Longueur du côté a (m) "; CA
220 INPUT "Longueur du côté b (m) "; CB
230 INPUT "Angle C (gon) "; AC
240 CC = SQR(CA^2+CB^2-2*CA*CB*COS(AC))
250 AB = ARCCOS((CA^2+CC^2-CB^2)/(2*CA*CC))
260 IF AB < 0 THEN AB=AB+200 : REM si B négatif, ajouter 200 gon

```



```

280 PRINT "Angle A : "; 200 - AB - AC ;"gon"
290 PRINT "Angle B : "; AB ;"gon"
295 PRINT "Côté c : "; CC ;"m" : END
299 REM On connaît un angle, le côté opposé et un autre côté
300 INPUT "Longueur du côté a (m) "; CA
320 INPUT "Longueur du côté b (m) "; CB
330 INPUT "Angle A (gon) "; AA
340 IF CA<CB*SIN(AA) THEN GOTO 390 : REM Cas sans solution (aller en 390)
345 IF CA=CB*SIN(AA) AND AA>=100 THEN GOTO 390
350 IF CA>CB*SIN(AA) AND AA>100 AND CA<=CB THEN GOTO 390
355 AB = ARCSIN(CB*SIN(AA)/CA) : AC = 200 - AA - AB
360 PRINT "Solution 1" : PRINT "Angle B (gon) ";AB
363 PRINT "Angle C (gon) ";AC
364 PRINT "Côté c (m) ";SIN(AC)*CA/SIN(AA)
365 IF CA>CB*SIN(AA) AND AA<100 AND CA<CB THEN GOTO 375
370 PRINT "Solution unique" : END : REM Fin du cas à une seule solution
375 PRINT "Solution 2" : REM Début du calcul de la 2e solution
380 PRINT "Angle B' (gon) "; 200-AB
381 PRINT "Angle C' (gon) ";AB - AA
385 PRINT "Côté c' (m) ";SIN(AB-AA)*CA/SIN(AA) : END
390 PRINT "Pas de solution" : END

```

Ce programme est donné sur le cédérom du livre sous forme de fichier (TRIANGLE.BAS) lisible par le programme QBASIC.EXE livré avec le DOS (à partir de la version 5.0). Le listing est dans le fichier TRIANGLE.TXT.

Remarques

- Le listing ci-dessus est donné pour une calculatrice programmable en BASIC standard et réglée en mode grades. Le listing du programme TRIANGLE.BAS (sur le cédérom) fait apparaître des conversions d'angles de radians en grades (et inversement) puisque l'ordinateur travaille en radian.
- Le listing ci-dessus suppose que votre Basic dispose des deux fonctions arccos() et arcsin(). Si ce n'est pas le cas, vous disposez d'au moins l'une d'entre elles, par exemple arcsin(), et vous obtiendrez l'autre grâce à la transformation suivante : $\text{ALPHA} = \arcsin(\text{SQR}(1 - \text{COSINUS}^2))$. Cette expression permet de mettre dans la variable alpha la valeur de l'angle dont le cosinus est stocké dans la variable cosinus. Elle remplace donc la fonction arccos(). Alpha est donné en grades si la machine est réglée en mode grades lors de l'exécution du programme. Par exemple, la ligne 250 du programme ci-dessus deviendrait :

```
250 AB = ARCSIN(SQR(1 - ((CA^2+CC^2-CB^2)/(2*CA*CC))^2))
```

4.3.8 Tableau de calcul pour la résolution de triangles

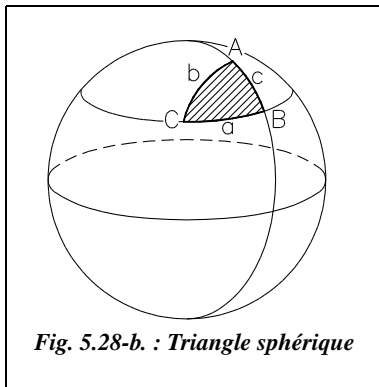


Si vous préférez l'utilisation d'un tableur, la résolution des triangles est proposée sur le fichier TRIANGLE.XLS pour EXCEL.

4.4 Trigonométrie sphérique

Quelques relations de trigonométrie sphérique sont nécessaires à certains calculs sur la « sphère » terrestre. Elles sont données ci-après.

4.4.1 Excès sphérique



La somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à 200 gon d'une quantité ε , appelée excès sphérique. Le calcul de cet excès permet donc de remplacer le triangle sphérique ABC (fig. 5.28-b.) par un triangle plan dans lequel la trigonométrie classique s'applique. On a :

$$A + B + C = 200 + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon_{\text{radians}} = \frac{S}{R^2}$$

S est la surface du triangle sphérique.

R est le rayon de la sphère.

L'excès sphérique ε étant toujours très petit, la surface S est calculé par des formules approchées de trigonométrie plane, par exemple, $2.S = a.b.\sin C$ ou autre. Les angles du triangle plan équivalents sont diminués de $\varepsilon/3$.

Application

La surface terrestre est proche d'un ellipsoïde de révolution (tome 1, chap. 2, § 2.) dont le rayon de courbure moyen en un lieu de latitude φ est donné par :

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

a et e sont des paramètres de définition de l'ellipsoïde (demi-grand axe et excentricité). Calculez l'excès sphérique d'un triangle équilatéral de 20 km de côté situé à Antibes.

Réponse

À Antibes, $R \approx 6\,377\,121$ m. Pour un triangle équilatéral de 20 km de côté $S = 20\,000^2 \cdot \sqrt{3}/4$ m², donc $\varepsilon = 2,7$ dmgon.

Remarque

L'assimilation locale de la terre à une sphère de rayon moyen R et l'approximation de la formule donnant l'excès sphérique conduisent à des erreurs sur les côtés des triangles qui sont de l'ordre du centimètre pour des côtés de 180 km, donc largement négligeables pour des mesures courantes.

4.4.2 Quelques relations dans les triangles sphériques

Si on note A, B, C les angles aux sommets du triangle sphérique et a, b et c les arcs opposés à ces angles, on obtient :

- la relation fondamentale suivante : $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$;
- la formule des cotangentes suivante : $\cotan A \cdot \sin C = \cotan a \cdot \sin b - \cos b \cdot \cos c$;
- la formule des sinus suivante : $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$.

Ces relations restent valables après permutations circulaires des paramètres. Ces relations font intervenir les arcs a, b et c mesurés sur la sphère de rayon unité. Ces longueurs sont donc équivalentes aux angles au centre de chaque arc intercepté sur la sphère étudiée.

Les angles A, B et C sont les angles plans entre les tangentes au triangle à chaque sommet.

5 EXTENSION DE CERTAINES FORMULES AUX POLYGONES

5.1 Surface d'un QUADRILATÈRE

La surface du quadrilatère ABCD ci-contre (fig. 5.29.), inscriptible dans un cercle de rayon R et circonscriptible à un cercle de rayon r , s'exprime par :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ S &= pr \\ \text{avec : } p &= \frac{a+b+c+d}{2} \end{aligned}$$

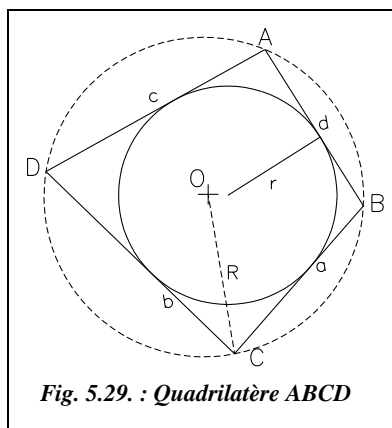


Fig. 5.29. : Quadrilatère ABCD

5.2 Somme des angles internes d'un polygone

La somme des angles internes d'un polygone de n côtés (fig. 5.30.) vérifie la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = (n-2) \cdot 200 \text{ gon}$$

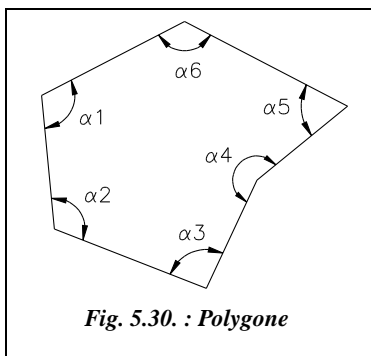


Fig. 5.30. : Polygone

Application

1 - Vérifiez que cette formule s'applique au cas particulier du triangle.

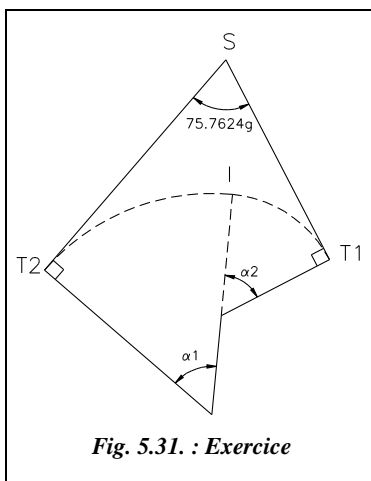
2 - Démontrez que la somme des angles externes vérifie la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i = (n+2) \cdot 200 \text{ gon avec } \beta_i = 400 - \alpha_i$$

Réponse

1- Pour $n = 3$, la somme des angles internes vaut 200 gon.

2- Remplacez les angles internes α_i par $400 - \beta_i$ et simplifiez.



Application

La figure 5.31. schématise un raccordement circulaire entre deux alignements droits S-T1 et S-T2 : le raccordement est constitué de deux arcs de cercle tangents entre eux au point I et d'angles aux centres respectifs α_1 et α_2 . Trouvez la relation liant α_1 et α_2 .

Réponse

$$75,7624 + 100 + 100 + \alpha_1 + (200 + \alpha_2) = 600$$

$$\text{Donc : } \alpha_1 + \alpha_2 = 124,2376 \text{ gon.}$$

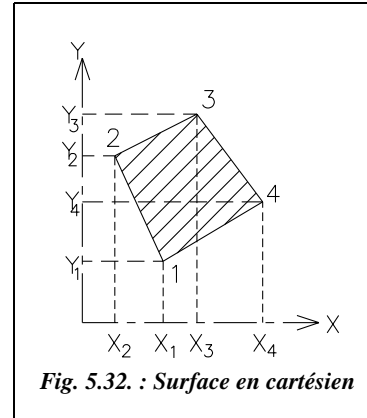
6 SURFACE D'UN POLYGONE QUELCONQUE

6.1 Les sommets sont connus en coordonnées cartésiennes x, y

Soit un polygone de n sommets dont chacun est connu par ses coordonnées rectangulaires $(X_i ; Y_i)$. La figure 5.32. présente un exemple avec $n = 4$. La surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} X_i (Y_{i-1} - Y_{i+1})$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Y_i (X_{i-1} - X_{i+1})$$



Remarques

- Si la surface S est positive, alors la surface S' est négative et inversement. On doit donc toujours vérifier que $S' + S = 0$.
- Lors de la rotation des indices i , on applique la convention suivante :

$$X_0 = X_n ; Y_0 = Y_n ; X_{n+1} = X_1 ; Y_{n+1} = Y_1.$$

Cela revient à considérer les sommets comme étant sur une boucle décrite en tournant autour de la surface ; le sommet 1 est alors le suivant du sommet n et, par conséquent, le sommet n est le précédent du sommet 1.

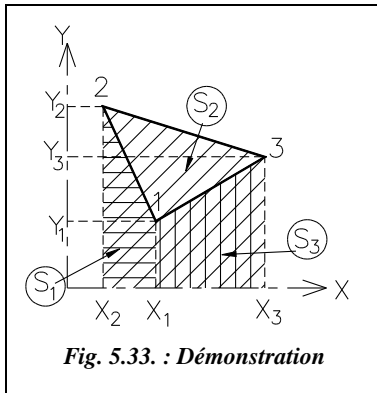
Démonstration de ces formules

Le raisonnement est fait sur le triangle 1-2-3 (fig. 5.33.) : sa surface peut être décomposée en trois trapèzes rectangles :

- le trapèze $(X_1, X_2, 2, 1)$ de surface $S_1 = (X_1 - X_2) \cdot (Y_1 + Y_2) / 2$
- le trapèze $(X_3, X_2, 2, 3)$ de surface $S_2 = (X_3 - X_2) \cdot (Y_3 + Y_2) / 2$
- le trapèze $(X_3, X_1, 1, 3)$ de surface $S_3 = (X_3 - X_1) \cdot (Y_3 + Y_1) / 2$

La surface totale du triangle 1-2-3 est $S_2 - S_3 - S_1$. Après mise en facteur, on obtient :

$$2 \cdot S' = Y_1 \cdot (X_3 - X_2) + Y_2 \cdot (X_1 - X_3) + Y_3 \cdot (X_2 - X_1).$$



On arrive donc à la formulation obtenue précédemment pour la surface S' . La formulation donnant la surface S serait obtenue en découpant le triangle en trapèzes rectangles « horizontaux ».

La suite de la démonstration est effectuée par récurrence dont nous rappelons le principe : la formule est démontrée pour l'indice $n = 3$; on la considère vraie à l'indice n et l'on démontre qu'elle reste vraie à l'indice $n+1$; elle est alors vraie pour toute valeur de n .

Application

Le polygone suivant est défini par les coordonnées locales de ses sommets exprimées en mètre dans le tableau suivant. Calculez sa superficie au centimètre carré près.

Point	A	B	C	D	E
X_i (m)	120,41	341,16	718,59	821,74	297,61
Y_i (m)	667,46	819,74	665,49	401,60	384,13

Résultats

Point	$X_{i-1} - X_{i+1}$	$Y_{i-1} - Y_{i+1}$	$X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1})$	$Y_i(X_{i-1} - X_{i+1})$
A	-43,55	-435,61	-52451,8001	-29067,8830
B	-598,18	1,97	672,0852	-490352,0732
C	-480,58	418,14	300471,2226	-319821,1842
D	420,98	281,36	231204,7664	169065,5680
E	701,33	-265,86	-79122,5946	269401,8929
Totaux			400773,6795	-400773,6795

Surface totale : 200 386,8398 m². Périmètre : 1 817,85 m.

Le double calcul de S et S' est une excellente vérification des calculs.

6.2 Les sommets sont connus en coordonnées polaires

La définition des coordonnées polaires est donnée au paragraphe 8.1.

Un appareil du type théodolite stationné au point S permet d'effectuer les lectures des angles α_i sur les sommets du polygone. Si on mesure ensuite (par exemple au ruban) la distance horizontale du point S à chacun des sommets, on connaît ces sommets en coordonnées polaires topographiques (Dh , α) dans le repère (S , X , Y), l'axe des ordonnées Y étant la position du zéro du cercle horizontal du théodolite (fig. 5.34.).

Attention : ces coordonnées polaires sont particulières à la topographie puisque le zéro des angles est placé sur l'axe des ordonnées Y et leur sens de rotation est horaire. Les coordonnées polaires mathématiques placent le zéro des angles sur l'axe des abscisses X avec des angles tournant positivement en sens trigonométrique (ou inverse horaire ; voir paragraphe 8.1).

On découpe la surface totale du polygone de n côtés en n triangles partant tous du sommet S . On peut en déduire la surface en projection horizontale d'un polygone de n côtés par la formule suivante :

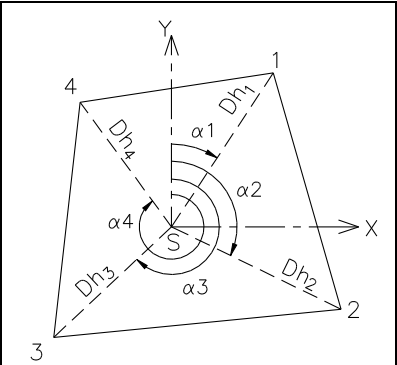


Fig. 5.34. : Surface en polaire

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \cdot Dh_{i+1} \cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

Remarque

- Par convention $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ et $Dh_{n+1} = Dh_1$; le sommet 1 est le sommet suivant le sommet n .
- La surface du triangle (1S4) de l'exemple de la figure 5.34. fait intervenir l'angle $(\alpha_1 - \alpha_4)$ qui est négatif. Pour obtenir sa valeur dans le tableau, il suffit de lui ajouter 400 gon. Ceci n'est pas nécessaire dans le calcul puisque le sinus ne change ni de valeur ni de signe : $\sin\alpha = \sin(400 + \alpha)$.
- Si la station S est située à l'extérieur du polygone, la formule est également applicable. Il apparaît alors dans le calcul des surfaces négatives dont il faut conserver le signe dans la somme de la formule générale.

Application

Calculez la surface du polygone (A-B-C-D-E) levé en coordonnées polaires topographiques à partir de la station S (fig. 5.35.). Ces coordonnées sont données dans le tableau suivant :

Points	Dh (m)	Angles (gon)
A	48,12	53,12
B	51,33	100,03
C	48,71	147,41
D	57,48	261,53
E	47,93	380,37

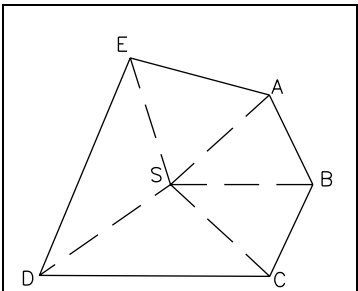


Fig. 5.35. : Exercice

Résultats

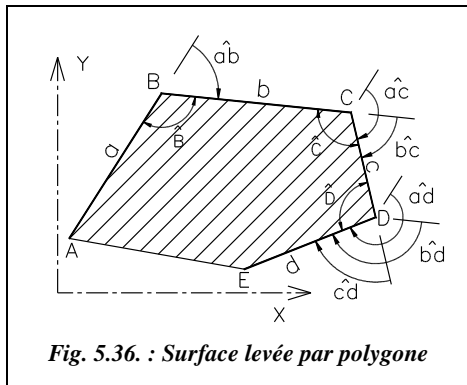
La surface totale est 5 409,1575 m² et le périmètre 292,36 m. Le tableau suivant donne le détail des calculs.

Triangles	Angle ($\alpha_{i+1} - \alpha_i$)	Surface (m ²)	Côté opposé (m)
ASB	46,91	829,8781	35,94
BSC	47,38	846,8655	36,46
CSD	114,12	1365,6326	83,12
DSE	118,84	1317,6265	84,90
ESA	72,75	1049,1548	51,94

6.3 Formule de sarron

Soit un polygone de n côtés. Si l'on connaît la longueur de $n-1$ côtés et la mesure des $n-2$ angles entre ces côtés, on peut calculer la surface du polygone par la formule :

$$S = \frac{1}{2} \left[ab \cdot \sin \widehat{ab} + ac \cdot \sin \widehat{ac} + ad \cdot \sin \widehat{ad} + \dots \right. \\ \left. + bc \cdot \sin \widehat{bc} + bd \cdot \sin \widehat{bd} + \dots \right. \\ \left. + cd \cdot \sin \widehat{cd} + \dots \right]$$



- a, b, c, d, \dots représentent les $n-1$ côtés connus.
- \widehat{ab} est l'angle entre les vecteurs \vec{AB} et \vec{BC} . \widehat{ab} est aussi le complémentaire de l'angle interne au sommet B (noté \widehat{B}) : $\widehat{ab} = 200 - \widehat{B}$
- $\widehat{ab}, \widehat{ac}, \widehat{ad}, \widehat{bc}, \widehat{bd}, \dots$ représentent les $n-2$ angles dirigés entre les $n-1$ côtés de longueur connue.
- Les angles dirigés s'additionnent :

$$\widehat{ac} = \widehat{ab} + \widehat{bc}, \widehat{ad} = \widehat{ac} + \widehat{cd}, \text{ etc. (fig. 5.36.)}$$

La formule s'applique au triangle : $2.S = a.b.\sin \widehat{ab} = a.b.\sin(200 - \widehat{ab})$.

Démonstration de la formule de Sarron

On découpe le quadrilatère de la figure 5.37. en deux triangles ABD et BCD dont les surfaces se calculent comme suit :

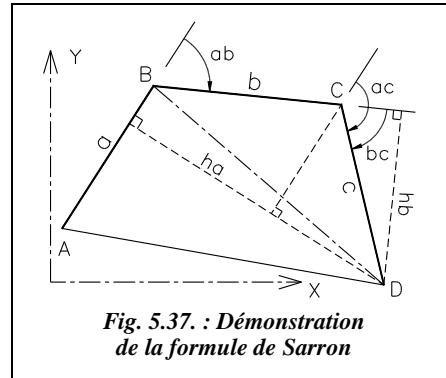
$$2.S_{ABD} = a.h_a = a.[b.\sin \widehat{ab} + c.\sin(200 - \widehat{ac})].$$

$$2.S_{BCD} = b.h_b = b.c.\sin \widehat{bc}.$$

On obtient finalement la formule de Sarron pour un quadrilatère :

$$2.S = a.b.\sin \widehat{ab} + a.c.\sin \widehat{ac} + b.c.\sin \widehat{bc}$$

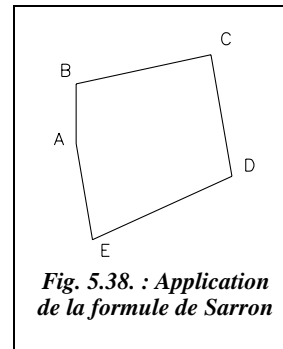
La démonstration pour un polygone à n côtés peut être faite sur le même principe.



Application

Calculez la surface du polygone ABCDE (fig. 5.38.) sur lequel les mesures suivantes ont été effectuées :

Côté AB = 12,32 m Angle ABC = 113,656 gon
Côté BC = 28,46 m Angle BCD = 97,127 gon
Côté CD = 25,52 m Angle CDE = 116,632 gon
Côté DE = 31,59 m



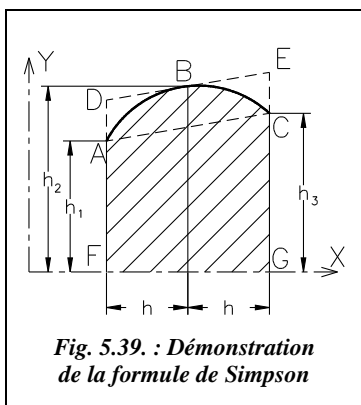
Réponse

La surface totale est 869,5569 m²; le tableau suivant donne le détail de calculs des différents termes de la formule.

Tableau de calcul de la surface du polygone ABCDE (fig. 5.38.) par la formule de sarron.

Côtés (m)	Angles dirigés (gon)			Surfaces en m ²		
a = 12,32						
	ab= 86,344			a.b.sin(ab)= 342,5913		
b = 28,46						
	bc= 102,873	ac=ab+bc= 189,217		a.c.sin(ac)= 52,9996	b.c.sin(bc)= 725,5597	
c = 25,52						
	cd= 83,368	bd=bc+cd= 186,241	ad=ac+cd= 272,585	a.d.sin(ad)= -353,6564	b.d.sin(bd)= 192,7991	c.d.sin(cd)= 778,8205
d = 31,59						

6.4 Formule de Simpson



Cette formule, peu utilisée en topographie, permet d'introduire et donc de comprendre la formule des trois niveaux (§ 7.2.).

Soit à calculer la surface délimitée par l'arc de parabole AC (d'axe vertical) et l'axe des abscisses X (fig. 5.39.). L'arc est découpé en deux parties AB et BC telles que les projections de A, B et C sur l'axe des abscisses X soient équidistantes d'une valeur h .

On utilise la propriété de la parabole suivante : la surface délimitée par l'arc de parabole ABC et la droite AC est égale au deux tiers de la surface du parallélogramme circonscrit ADEC ; la surface hachurée FABCG a donc pour valeur :

$$S = \left(\frac{h_1 + h_3}{2} 2h \right) + \frac{2}{3} \left(2hh_2 - 2h \frac{h_1 + h_3}{2} \right) = \frac{h}{3} (h_1 + 4h_2 + h_3).$$

En découpant la surface en quatre tronçons égaux, on obtiendrait :

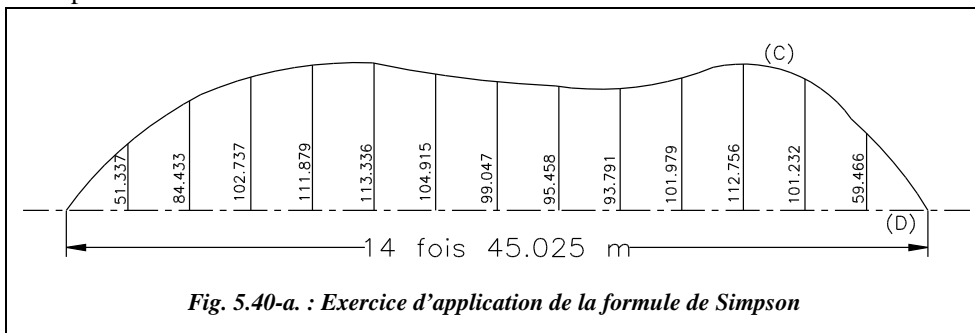
$$S = \frac{h}{3} (h_1 + 4h_2 + h_3) + \frac{h}{3} (h_3 + 4h_4 + h_5) = \frac{h}{3} (h_1 + h_5 + 4h_2 + 2h_3).$$

En généralisant à une suite de n intervalles équidistants de h :

$$S = \frac{h}{3} (h_1 + h_{n+1} + 4 \sum h_{pair} + 2 \sum h_{impair})$$

Le nombre n d'intervalles doit être pair. S'il est imposé impair, le dernier tronçon est calculé à part (par exemple en le divisant en deux).

On peut appliquer cette formule à la détermination de la superficie délimitée par une courbe quelconque découpée en n tronçons égaux. Plus le découpage est serré, meilleure est la précision.



Application

Calculez la surface délimitée par la courbe C et la droite D (fig. 5.40-a.). Chacun des 14 tronçons de courbe de largeur $h = 45,025$ m est assimilé à un arc de parabole.

Résultat

En appliquant la formule, il vient : $S = 45,025/3 \cdot [0 + 0 + 4 \cdot (51,337 + 102,737 + 113,336 + 99,047 + 93,791 + 112,756 + 59,466) + 2 \cdot (84,433 + 111,879 + 104,915 + 95,458 + 101,979 + 101,232)] \approx 55\,976 \text{ m}^2$. La valeur « exacte » (mesurée grâce à la commande *AIRE* option *Entité* d'AutoCAD) est de $56\,011,51 \text{ m}^2$, soit un écart inférieur à 0,1 %. La courbe a été tracée par la commande *POLYLIGNE* ; elle est donc constituée d'une succession d'arcs de cercles tangents entre eux.

6.5 Formules complémentaires

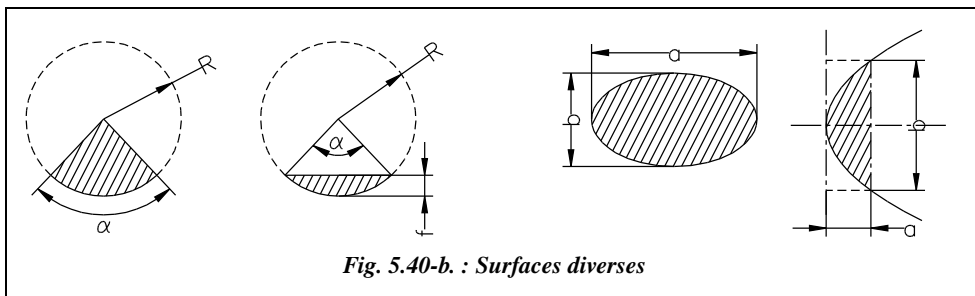


Fig. 5.40-b. : Surfaces diverses

Secteur circulaire	Segment circulaire	Ellipse	Segment parabolique
$S = \pi R^2 \frac{\alpha_{gon}}{400}$	$S = \pi R^2 \frac{\alpha_{gon}}{400} - R^2 \frac{\sin \alpha}{2}$ $f = R \cdot [1 - \cos(\alpha / 2)]$	$S = \frac{\pi ab}{4}$	$S = \frac{2}{3} ab$

6.6 Résolution informatique

6.6.1 Programmation en basic standard des formules précédentes



Ce programme regroupe les méthodes de calcul abordées précédemment, à l'exception de la formule de Simpson peu utilisée et dont la programmation présente peu d'intérêt. Suivant les données en sa possession, l'utilisateur choisira le sous-programme (1), (2) ou (3).

```
1 PRINT "Calcul de surfaces"
2 INPUT "(1)Cart. (2)Pol. (3)Sarron"; NU
3 ON NU GOTO 5, 100, 200
4 END
```

```

5 PRINT "Sommets donnés en tournant autour de la surface"
10 INPUT "Nombre de sommets"; N : DIM X(N) , Y(N) : REM N = nombre de sommets
20 FOR I=1 TO N : PRINT "Point n° ";I : REM Boucle d'entrée des coordonnées
30 INPUT "X= ";X(I) : INPUT "Y= ";Y(I)
50 NEXT I
60 S = X(1)*(Y(N)-Y(2))+X(N)*(Y(N-1)-Y(1)) : REM Valeur initiale de la surface S
70 FOR I=2 TO N-1 : REM Boucle d'incrémentement de la surface S
80 S = S + X(I)*(Y(I-1)-Y(I+1))
85 NEXT I
90 PRINT "Surface : ";ABS(S)/2;" m2" : END
100 PRINT "Sommets donnés en polaires"
110 INPUT "Nombre de sommets"; N : DIM D(N) , A(N) : REM N = nombre de sommets
120 FOR I=1 TO N : PRINT "Point n° ";I
130 INPUT "Distance m ";D(I)
140 INPUT "Angle gon ";A(I)
150 NEXT I
155 S = D(1)*D(N)*SIN(A(1)-A(N)) : REM Valeur initiale de la surface S
160 FOR I=1 TO N-1 : REM Boucle d'incrémentement de la surface S
170 S = S + D(I)*D(I+1)*SIN(A(I+1)-A(I))
180 NEXT I
190 PRINT "Surface totale : ";S/2;" m2" : END

200 PRINT "Surface par la formule de Sarron"
210 INPUT "nomb. de côtés connus : "; N : DIM C(N), A(N), AC(N)
220 FOR i = 1 TO N
225 PRINT "Côté "; i; "m"; : INPUT C(i)
230 IF i < N THEN PRINT "Angle "; i; "-"; i+1; "gon"; : INPUT A(i)
240 NEXT i
250 FOR i = 1 TO N - 1 : REM Boucle de calcul des angles cumulés AC( )
255 AC(i) = AC(i - 1) + A(i) : NEXT i
260 S = 0 : FOR i = 1 TO N - 1 : FOR j = i TO N - 1 : REM Boucle d'incrémentement de S
270 S = S + C(i) * C(j + 1) * SIN((AC(j) - AC(i - 1)))
280 NEXT j : NEXT i
290 PRINT "Surface "; S / 2;" m2" : END

```

Le listing de ce programme est fourni sur cédérom dans le fichier SURFACES.BAS pour une utilisation avec le programme QBASIC.EXE. Le listing est dans SURFACES.TXT.

6.6.2 Calcul de surface automatisé sur tableur



Un tableau de calcul prêt à l'emploi est fourni sur le cédérom de l'ouvrage : il se nomme SURFACES.XLS. Il ne traite que les surfaces levées en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires.

Les coordonnées des sommets de surfaces levées par cheminements au moyen de la formule de Sarron seront calculées (voir chap. 2, § 1.) avant d'être utilisées dans la feuille « Cartésien » du tableau SURFACES.XLS.

6.6.3 Exemples de résolution graphique



1- Polygone dont les sommets sont donnés en coordonnées cartésiennes : c'est le cas le plus simple pour la résolution graphique sur DAO. De plus, depuis le développement de l'utilisation des stations de travail électroniques qui fournissent directement les coordonnées des points levés, cela devient quasiment le cas général.

Environnement de travail : réglez le nombre de chiffres après la virgule souhaité dans le menu **FORMAT / CONTROLE DES UNITES...** (commande *DDUNITS*), par exemple quatre chiffres après la virgule pour les longueurs de manière à obtenir le centimètre carré dans les surfaces affichées.

Tracé du polygone : *POLYLIGNE* du point 120.41,667.46 au point 341.16,819.74 au point 718.59,665.49 au point 821.74,401.60 au point 297.61,384.13 au point *Clore*

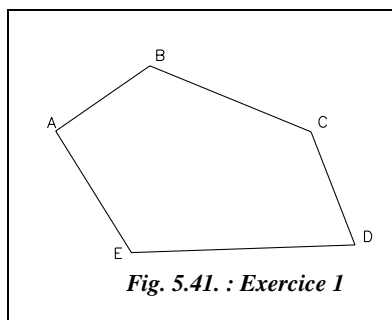


Fig. 5.41. : Exercice 1

Mesure de la surface : commande *AIRE* option *Objet*, cliquez sur la polyligne contour et lisez la surface et le périmètre en bas de l'écran. Résultat au paragraphe 6.1.

2- Polygone dont les sommets sont donnés en coordonnées polaires : la construction graphique est aussi simple que précédemment. On utilise les coordonnées polaires absolues. Environnement de travail : mêmes réglages que précédemment avec, de plus, le réglage des unités angulaires en grades, zéro au nord, sens de rotation horaire.

Tracé du polygone : *POLYLIGNE* du point 48.12 < 53.12 au point 51.33 < 100.03 au point 48.71 < 147.41 au point 57.48 < 261.53 au point 47.93 < 380.37 au point *Clore*. Mesure de la surface : voir 1-. Résultat au paragraphe 6.2.

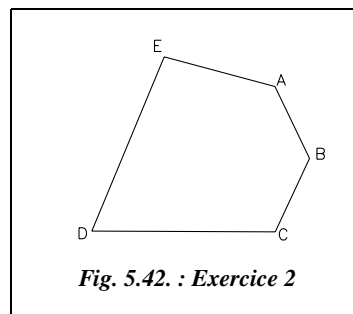
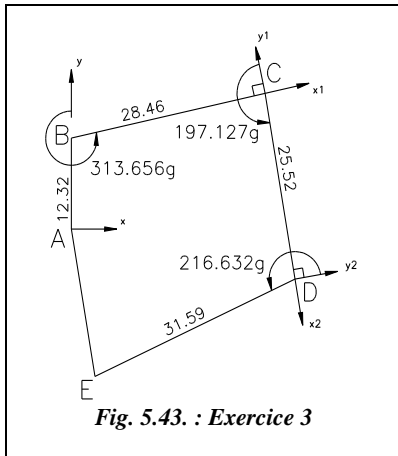


Fig. 5.42. : Exercice 2



3- Polygone dont on connaît $n-1$ côtés et $n-2$ angles entre ces côtés : formule de Sarron

La construction graphique est plus complexe. Son intérêt est l'introduction d'une notion très utile en topographie : le changement de repère (SCU pour AutoCAD : Système de Coordonnées Utilisateur).

Environnement : même configuration qu'au 2-.

AB et BC sont tracées dans le repère général (A,x,y) : **LIGNE** du point 0,0 au point 0,12.32 au point @28.46<-313.656.

Pour tracer CD, nous allons passer dans le repère (B,x1,y1) : commande **SCU** option **Objet**

cliquez sur la ligne BC vers le point B. Tracé de CD : **LIGNE** du point C (**EXTrémité** de BC) au point @25.52<-197.127

On effectue les mêmes opérations pour tracer DE : définissez le repère (C,x2,y2) puis **LIGNE** du point D au point @31.59<-216.632

EA n'est pas indispensable. Mesurez la surface du polygone avec la commande **AIRE**, donnez successivement les 5 points A, B, C, D puis E (**EXTrémité** de...) puis validez (↵) après l'entrée de E. Le résultat est donné au paragraphe 6.3.

Remarques

- Les options de la commande **SCU** sont accessibles à la souris dans le menu VUE / DEFINIR LE SCU.
- Chaque fois que l'on définit un nouveau SCU, on peut le sauvegarder (option Sauver de la commande **SCU**) afin de pouvoir le rappeler simplement plus tard (option Restaurer). Tout cela peut aussi être géré dans la boîte de dialogue DEFINIR LE SCU / SCU EXISTANT du menu VUE (commande **DDSCU**).

7 CALCULS DE VOLUMES

7.1 Volumes quelconques

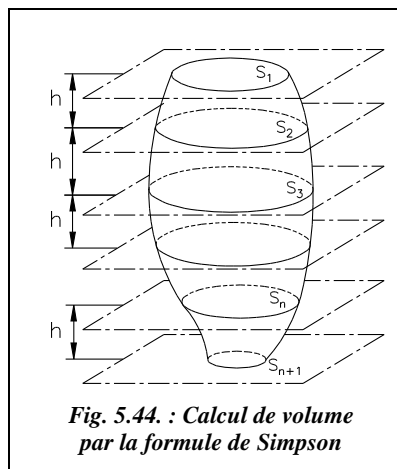
C'est une application de la formule de Simpson démontrée au paragraphe 6.4. Le volume d'un solide quelconque (fig. 5.44.) peut être évalué à l'aide de la formule suivante :

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_{n+1} + 4 \sum S_{pair} + 2 \sum S_{impair})$$

Le volume est découpé en n tronçons par $n+1$ plans parallèles et équidistants d'une hauteur h . La hauteur totale est donc $H = n.h$.

Le nombre de tronçons doit être pair. S'il est imposé impair, le dernier (ou le premier) tronçon doit être traité à part (par exemple en le découpant en deux).

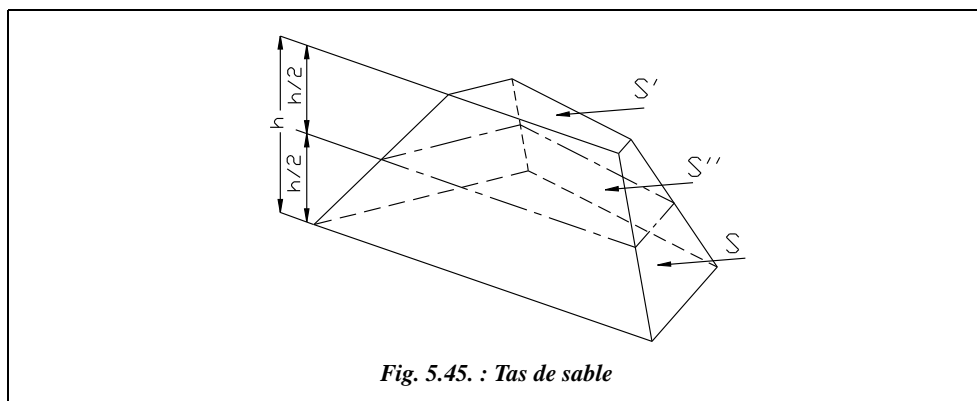
Le calcul de volume au moyen de courbes de niveau effectué au chapitre 10 du tome 1, paragraphe 2.5.3. est une application de cette formule.



7.2 Formule des trois niveaux

Cette formule permet de calculer la plupart des volumes complexes (tronc de pyramide, tronc de cônes, segments sphériques, tas de sable, etc.). Soit le volume (fig. 5.45.) tel que :

- les surfaces S , S' et S'' sont parallèles entre elles ;
- les surfaces extrêmes S et S' sont distantes de la valeur h hauteur du volume ;
- la surface S'' est située à la demi-hauteur $h/2$.



Le volume total vaut alors : $V = \frac{h}{6}(S + S' + 4S'')$

En fait, c'est une application de la formule du paragraphe 7.1. pour $n = 2$.

À partir de cette formule, on peut retrouver le volume d'une pyramide de hauteur h et de surface de base S : $V_{\text{pyramide}} = h / 6 \cdot (S + 0 + 4 \cdot S / 4) = S \cdot h / 3$.

7.3 Formule de la moyenne des bases

Dans le cadre de calculs de cubatures pour des mouvements de terre (voir tome 1, chap. 10, § 2.5.), il n'est pas utile d'effectuer un calcul exact des volumes de terre, les quantités de terre déplacées et les incertitudes sur les dimensions réelles des excavations et sur la connaissance du terrain naturel sont telles qu'il suffit d'un calcul approché pour rester dans la même marge d'erreur. On emploie alors la méthode de calcul suivante (fig. 5.46.) : on considère que le volume V est égal au produit de la demi-somme des surfaces qui le limitent $(S + S')/2$ par la distance h qui les sépare.

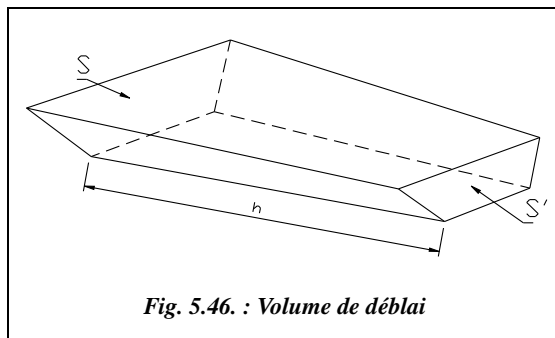


Fig. 5.46. : Volume de déblai

$$V = h \frac{S' + S}{2}$$

Pour démontrer cette formule, on part de la formule des trois niveaux.

S' et S étant parallèles et distantes de h , on peut dire que $S'' = (S + S') / 2$ (si les facettes qui joignent S et S' sont des plans. En remplaçant dans la formule des trois niveaux, on obtient l'expression ci-dessus).

7.4 Calcul exact par décomposition en volumes élémentaires

Le volume à décomposer doit être délimité par des surfaces planes régulières (surfaces non gauches). Les volumes de base sont (fig. 5.47.) :

- la pyramide de surface de base S de volume $V = S \cdot h / 3$
- le tronc de prisme de section droite triangulaire S de volume $V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3) / 3$
- le tronc de prisme dont la section droite est un parallélogramme (voir tome 1, chap. 10, § 2.5.2.1.) de volume :

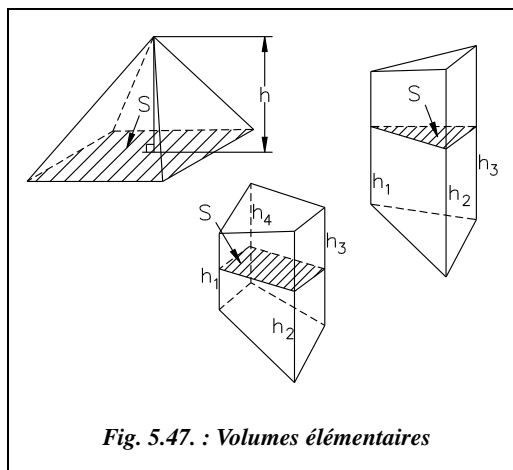


Fig. 5.47. : Volumes élémentaires

$$V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) / 4$$

D'autres formules sont données au paragraphe 7.6.

Application

Le volume de la figure 5.48. est délimité par deux sections droites parallèles distantes de 17,48 m ; sa face supérieure est horizontale (remblai). Il peut être décomposé en deux pyramides et quatre troncs de prisme à base triangulaire.

Calcul du volume total exact

- 1- Pyramides : $[(7,02 \cdot 6,25) / 2 \cdot 17,48] / 3$
 $[(3,71 \cdot 5,02) / 2 \cdot 17,48] / 3$
- 2- Troncs de prisme : $(4,71 \cdot 17,48) / 2 \cdot (6,14 + 7,02 + 0) / 3$
 $(6,12 \cdot 17,48) / 2 \cdot (7,23 + 5,02 + 0) / 3$
 $(17,21 \cdot 17,48) / 2 \cdot (5,02 + 7,02 + 6,14) / 3$
 $(17,22 \cdot 17,48) / 2 \cdot (7,23 + 6,14 + 5,02) / 3$

Volume total : 2 415,172 m³.

Par la formule de la moyenne des bases (§ 7.3.), on obtient :

$$S = 17,48 \cdot [(17,21 \cdot (5,02 + 7,02) / 2 + 3,71 \cdot 5,02 / 2 + 6,25 \cdot 7,02 / 2) + (17,22 \cdot (7,23 + 6,14) / 2 + 6,12 \cdot 7,23 / 2 + 4,71 \cdot 6,14 / 2)] / 2 \text{ soit } S = 2\,504 \text{ m}^3.$$

L'erreur relative est de 3,5 % ; elle est acceptable dans un calcul de cubatures.

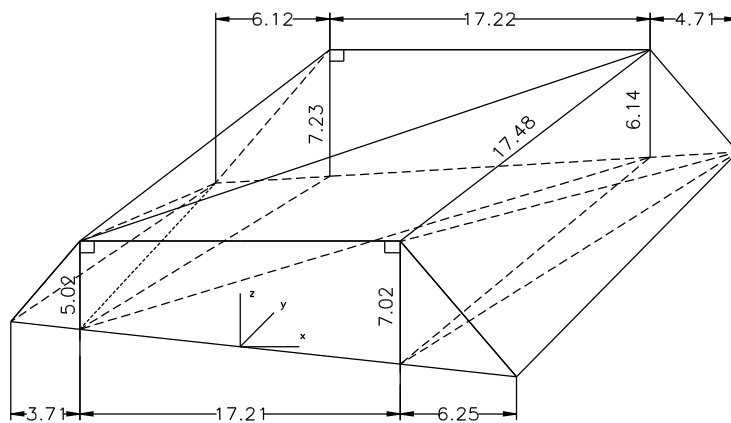


Fig. 5.48. : Exemple de volume de remblai

7.5 Application

Calculez le volume d'eau maximal que peut contenir la piscine schématisée sur la figure 5.49-a.

Les notation sont : les points en fond de piscine sont appelés (a, b, c, d, e, f et g) ; leur projection horizontale en surface est (a', b', c', d', e', f' et g') ; b'' et e'' représentent les points hauts du décroché central du fond de la piscine.

7.5.1 Calcul au moyen de la formule des trois niveaux

La piscine est découpée en trois volumes V_1 , V_2 et V_3 dont les faces extrêmes sont parallèles.

- V_1 est limité par les surfaces (g-h-g'-h') et (a-f-a'-f') : $h = 2,75$ m
 $S_1 = 3,75 \cdot 3,2$
 $S'_1 = 7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07)$
 $S''_1 = (3,75 + 1,875) \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07 / 2)$ $V_1 = 47,846 \text{ m}^3$
- V_2 est limité par les surfaces (a-f-a'-f') et (b-e-b'-e') : $h = 8,5$ m
 $S_2 = 7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07)$
 $S'_2 = 7,5 \cdot (3,2 - (2,75 + 8,5) \cdot 0,07)$
 $S''_2 = 7,5 \cdot (3,2 - (2,75 + 8,5 / 2) \cdot 0,07)$ $V_2 = 172,762 \text{ m}^3$

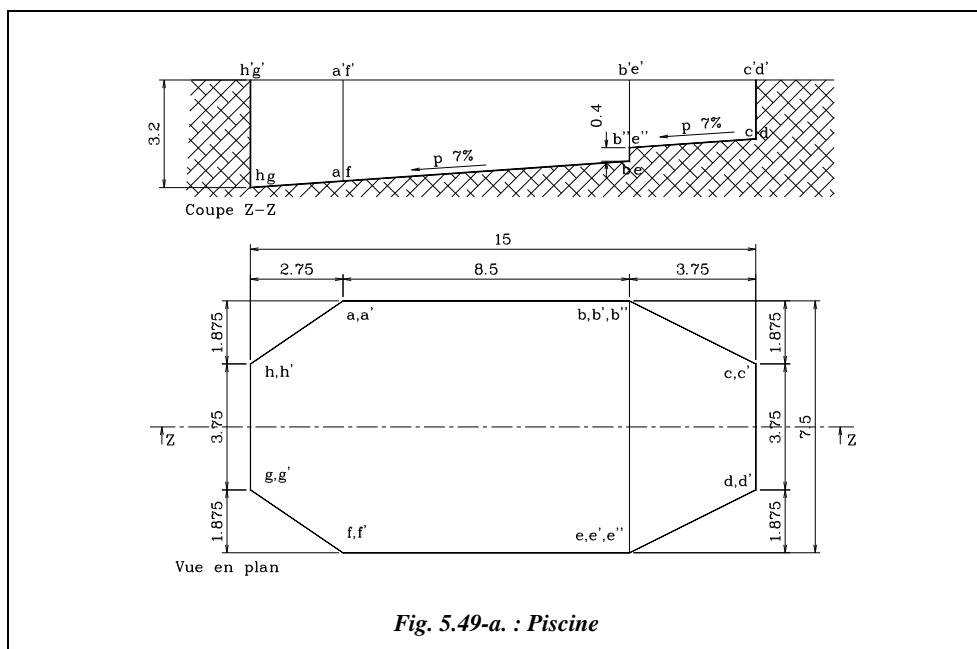


Fig. 5.49-a. : Piscine

- V_3 est limité par (b''-e''-b'-e') et (c-d-c'-d') : $h = 3,75 \text{ m}$
 $S_3 = 7,5 \cdot (3,2 - 0,4 - (2,75 + 8,5) \cdot 0,07)$
 $S'_3 = 3,75 \cdot (3,2 - 0,4 - 15 \cdot 0,07)$
 $S''_3 = (3,75 + 1,875) \cdot (3,2 - 0,4 - (2,75 + 8,5 + 3,75 / 2) \cdot 0,07)$
 $V_3 = 39,990 \text{ m}^3$

Le volume total est $V = V_1 + V_2 + V_3 = 260,598 \text{ m}^3$.

7.5.2 Calcul au moyen de la formule simplifiée de la moyenne des bases

Le découpage est le même que précédemment mais le calcul est effectué par la moyenne des bases (§ 7.3.).

$$V_1 = (3,75 \cdot 3,2 + 7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07)) \cdot 2,75 / 2 = 47,5148 \text{ m}^3$$

$$V_2 = (7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07) + 7,5 \cdot (3,2 - (8,5 + 2,75) \cdot 0,07)) \cdot 8,5 / 2 = 172,7625 \text{ m}^3$$

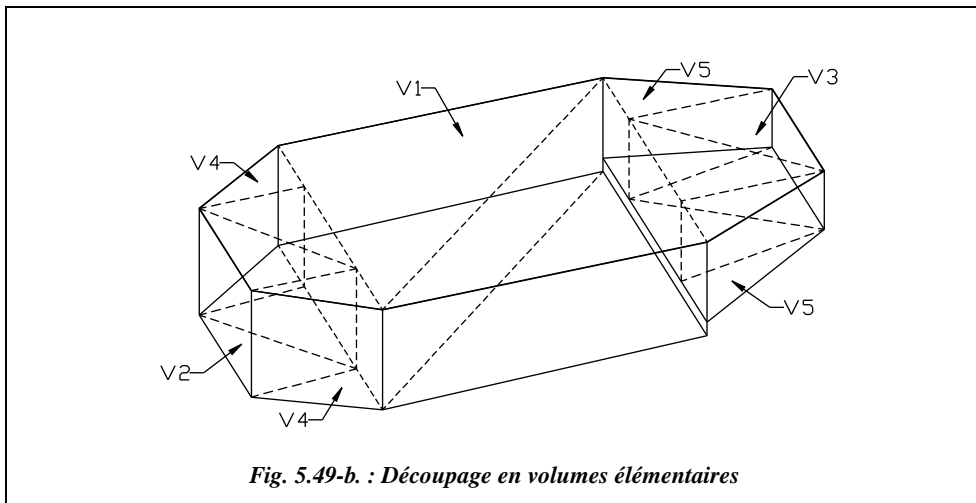
$$V_3 = (7,5 \cdot (3,2 - 0,4 - (2,75 + 8,5) \cdot 0,07) + 3,75 \cdot (3,2 - 0,4 - 15 \cdot 0,07)) \cdot 3,75 / 2 = 40,6055 \text{ m}^3$$

Le volume total est de $260,883 \text{ m}^3$ soit $0,1 \%$ d'erreur relative, ce qui est négligeable.

Le volume V_2 ne change pas d'une méthode à l'autre : de par sa forme, il constitue le cas idéal d'application de la formule simplifiée qui devient alors exacte.

7.5.3 Calcul exact à l'aide de la décomposition en volumes élémentaires

La décomposition est effectuée sur la figure 5.49-b.



- Les volumes V_1 , V_2 et V_3 peuvent être décomposés chacun en deux prismes de section droite triangulaire dont le volume total est :

$$V_1 = (8,5 \cdot 7,5) \cdot (2 \cdot 3,0075 + 2 \cdot 2,4125) / 4 = 172,7625 \text{ m}^3$$

$$V_2 = (3,75 \cdot 2,75) \cdot (2 \cdot 3,2 + 2 \cdot 3,0075) / 4 = 32,0074 \text{ m}^3$$

$$V_3 = (3,75 \cdot 3,75) \cdot (2 \cdot 2,0125 + 2 \cdot 1,75) / 4 = 26,4551 \text{ m}^3$$

- Les volumes V_4 et V_5 sont aussi des prismes de section droite triangulaire :

$$V_4 = (1,875 \cdot 2,75) / 2 \cdot (3,2 + 2 \cdot 3,0075) / 3 = 7,9191 \text{ m}^3$$

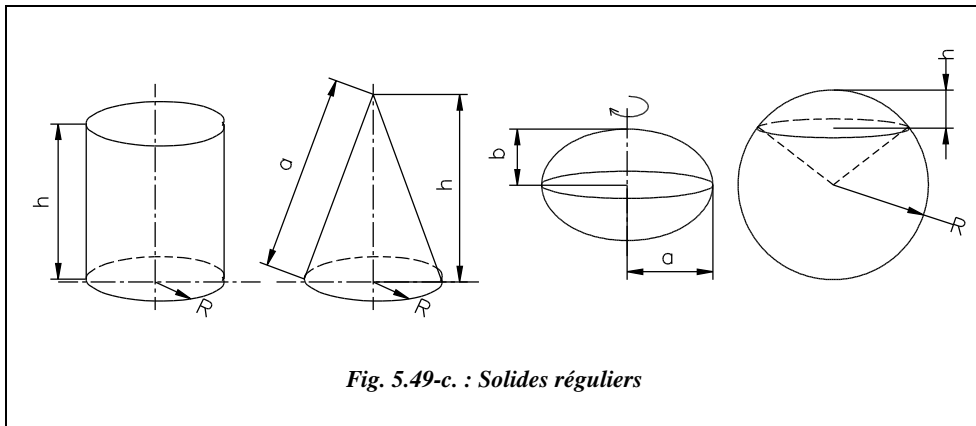
$$V_5 = (3,75 \cdot 1,875) / 2 \cdot (1,75 + 2 \cdot 2,0125) / 3 = 6,7676 \text{ m}^3$$

Le volume total est $V = V_1 + V_2 + V_3 + 2 \cdot V_4 + 2 \cdot V_5 = 260,598 \text{ m}^3$.

On constate que la formule des trois niveaux est exacte dans ce cas de figure.

7.6 Formules complémentaires

Les formules suivantes donnent les volumes et surfaces de solides réguliers (fig 5.49-c.).



Cylindre de section droite circulaire :	$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$
Cône de base circulaire :	$V = h \cdot R^2 \cdot \pi / 3$	$S = \pi \cdot a \cdot R$
Ellipsoïde de révolution :	$V = 4 / 3 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b$	
Sphère, secteur et segment sphérique :	$V_{\text{sphère}} = 4 / 3 \cdot \pi \cdot R^3$	$S_{\text{sphère}} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$
	$V_{\text{secteur}} = 2 / 3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$	$S_{\text{calotte}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$
	$V_{\text{segment sphérique}} = \pi / 3 \cdot h^2 \cdot (3R - h)$	

8 SYSTÈMES DE COORDONNÉES RECTANGULAIRES ET POLAIRES

8.1 Transformation de coordonnées d'un système a l'autre

8.1.1 Transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires mathématiques

Le point M (fig. 5.50.) est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires) : $M(X_M, Y_M)$.

Les coordonnées polaires mathématiques sont, dans l'ordre, le rayon polaire r et l'angle polaire α : $M(r, \alpha)$.

En convention polaire mathématique, les angles tournent positivement en sens trigonométrique (inverse horaire) ; leur zéro est sur l'axe des abscisses et ils sont généralement exprimés en radians, unité du système international.

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$r = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{Y_M}{X_M}$$

on voit sur la figure 5.50. que

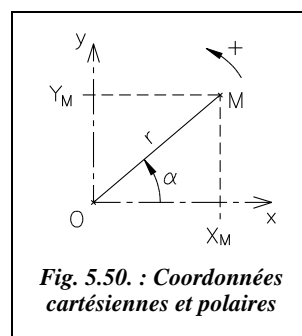


Fig. 5.50. : Coordonnées cartésiennes et polaires



La plupart des calculatrices possèdent cette transformation sous forme de fonction préprogrammée. Par exemple, sur FX850, tapez $POL(X, Y)$ puis [EXE] ; la calculatrice affiche alors r ; tapez ensuite [Y] [EXE], elle affiche α dans l'unité dans laquelle elle est réglée au moment du calcul (degré, grade ou radian).

Les formules de transformation inverse sont :

$$X_M = r \cdot \cos \alpha$$

$$Y_M = r \cdot \sin \alpha$$



Sur une calculatrice FX850P, tapez $REC(r, \alpha)$ puis [EXE] ; la calculatrice affiche X . Ensuite [Y] [EXE] donne Y .

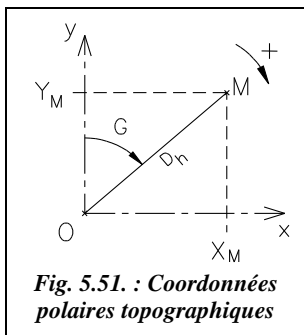
Applications

Transformez $M(102,32 \text{ m} ; 98,55 \text{ m})$ en coordonnées polaires mathématiques avec un angle en degrés : vous devez trouver le point N de l'exercice suivant.

Transformez $N(142,06 \text{ m} ; 0,7666 \text{ rad})$ en coordonnées cartésiennes : on retrouve M.

8.1.2

Transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires topographiques



Le point M (fig. 5.51.) est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires) : M (X_M , Y_M).

Les coordonnées polaires topographiques sont la distance horizontale Dh et le gisement G : M (Dh , G).

En convention polaire topographique, les angles tournent positivement en sens horaire ; leur zéro est sur l'axe des ordonnées et ils sont toujours exprimés en grades (symbole gon) : cela vient des choix technologiques sur les appareils de topométrie.

Les formules de transformation sont les suivantes :

on voit sur la figure 5.51. que

$$Dh = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2}$$

$$\tan G = \frac{X_M}{Y_M}$$



On peut utiliser une fonction de la calculatrice : il suffit d'inverser les données X et Y pour obtenir le résultat en convention topographique. Sur CASIO FX 850P, tapez POL(Y , X) puis [EXE] ; la calculatrice affiche alors Dh ; tapez ensuite [Y] [EXE], elle affiche G . Si ce dernier est négatif, ajouter 400 gon pour obtenir le gisement définitif.

Les formules de transformation inverse sont :

$$X_M = Dh \cdot \sin G$$

$$Y_M = Dh \cdot \cos G$$

Sur calculatrice FX850, tapez REC(Dh , G) puis [EXE] ; attention : la calculatrice affiche d'abord Y puis tapez [Y] [EXE] pour obtenir X .

Applications

Transformez M(102,32 m ; 98,55 m) en coordonnées polaires topographiques : vous devez retrouver le point N de l'exercice suivant.

Transformez N(142,06 m ; 51,195 gon) en coordonnées cartésiennes : on retrouve M.

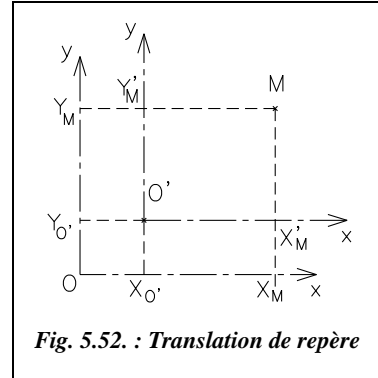
8.2 Changement de repère

8.2.1 Translation de repère

Soit un point M dont les coordonnées (X_M, Y_M) sont connues dans un repère $R(O, x, y)$ (fig. 5.52.).

On veut connaître les nouvelles coordonnées de M dans le repère $R'(O', x', y')$ déduit de $R(O, x, y)$ par translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ de coordonnées $(X_{O'}, Y_{O'})$, qui sont les coordonnées de la nouvelle origine O' dans l'ancien repère $R(O, x, y)$. Les nouvelles coordonnées de M dans $R'(O', x', y')$ sont :

M	$\left \begin{array}{l} X_M - X_{O'} \\ Y_M - Y_{O'} \end{array} \right.$
---	--



Démonstration

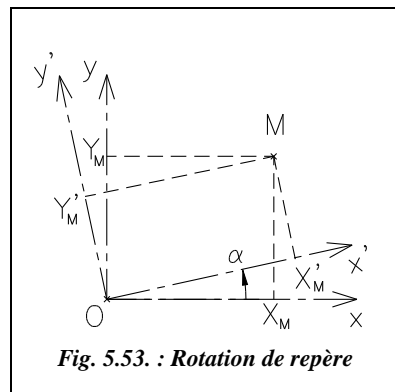
Les nouvelles coordonnées de M dans $R'(O', x', y')$ sont représentées par le vecteur $\overrightarrow{O'M}$:

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} X'_M = X_M - X_{O'} \\ Y'_M = Y_M - Y_{O'} \end{cases}$$

8.2.2 Rotation de repère

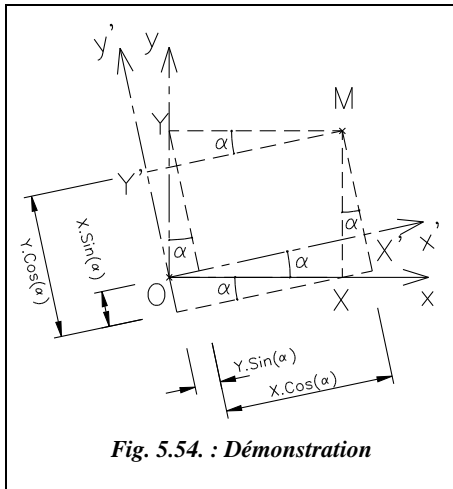
Soit un point M dont les coordonnées (X_M, Y_M) sont connues dans un repère $R(O, x, y)$ (fig. 5.53.) On veut connaître les nouvelles coordonnées de M $(X'_M; Y'_M)$ dans le repère $R'(O, x', y')$ déduit de $R(O, x, y)$ par rotation d'angle α . Les nouvelles coordonnées de M dans $R'(O, x', y')$ sont :

M	$\left \begin{array}{l} X'_M = X_M \cdot \cos \alpha + Y_M \cdot \sin \alpha \\ Y'_M = -X_M \cdot \sin \alpha + Y_M \cdot \cos \alpha \end{array} \right.$
---	---



Remarque

La formule ci-dessus n'est valable qu'en conventions mathématiques, c'est-à-dire sens de rotation trigonométrique et zéro des angles sur l'axe des x . Il faut conserver le signe de l'angle de rotation.



Démonstration

On obtient directement les équations à démontrer en projetant les coordonnées X et Y sur les axes x' et y' du nouveau repère (fig. 5.54.).

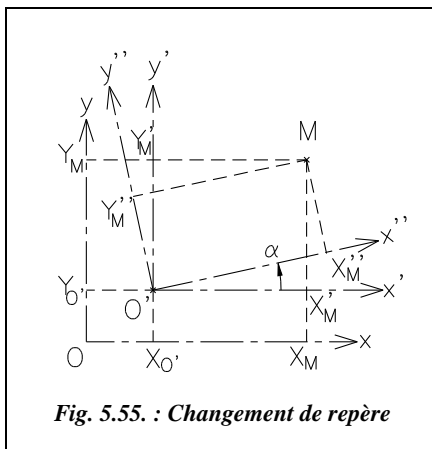
Application

Soit un point M de coordonnées (110,12 m ; 78,77 m) dans un repère $R(O, x, y)$. Calculez les nouvelles coordonnées du point M après rotation de repère de $-18,767$ gon et translation de vecteur $\vec{V}(-3,14 \text{ m} ; 9,8 \text{ m})$; \vec{V} est donné dans $R(O, x, y)$.

Réponse

Les coordonnées sont $M(88,36 ; 98,82)$ (voir les explication au paragraphe suivant).

8.2.3 Changement de repère : translation puis rotation



Attention : le résultat du calcul dépend de l'ordre dans lequel sont effectuées les transformations. L'ordre correct dépend du repère dans lequel est exprimé le vecteur de translation \vec{V} . Un mauvais choix peut amener à une erreur (voir l'exercice précédent).

En effet, si l'on commence par la rotation pour passer de $R(O, x, y)$ à $R(O, x'', y'')$, au moment d'effectuer la translation pour passer au repère $R(O', x'', y'')$, il faut que le vecteur de translation soit donné dans le repère intermédiaire $R(O, x'', y'')$ qui a subi une première rotation.

Si l'on commence par la translation, ce problème ne se pose pas puisque le vecteur de translation est exprimé dans le repère de départ dans lequel on effectue cette translation $R(O, x, y)$. Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.

En commençant par la rotation d'angle $(-18,767 \text{ gon})$, les coordonnées du point M deviennent (82,48 ; 107,37) dans le repère $R(O, x'', y'')$.

Le vecteur de translation devient dans le repère intermédiaire $R(O, x'', y'')$:

$$x = -3,14 \cdot \cos(-18,767) + 9,88 \cdot \sin(-18,767) = -5,88$$

$$y = 3,14 \cdot \sin(-18,767) + 9,88 \cdot \cos(-18,767) = 8,54$$

On retrouve, aux arrondis de calcul près, le point M (88,36 ; 98,82).

Dans ce cas, la formule générale est :

$$\begin{matrix} M & \begin{cases} X''_M = (X_M - X_{O'}) \cdot \cos \alpha + (Y_M - Y_{O'}) \cdot \sin \alpha \\ Y''_M = -(X_M - X_{O'}) \cdot \sin \alpha + (Y_M - Y_{O'}) \cdot \cos \alpha \end{cases} \end{matrix}$$

La notation matricielle (voir § 8.3.) donne : $M \begin{pmatrix} X''_M \\ Y''_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_M - X_{O'} \\ Y_M - Y_{O'} \end{pmatrix}$.

Cette notation, plus facile à mémoriser, fait apparaître la matrice de rotation d'angle α .

8.2.4 Changement de repère : rotation puis translation

En topographie, ce problème se pose généralement lorsque l'on souhaite passer d'un repère local (O', x', y') à un repère général (O, X, Y) (fig. 5.56.) : le point $M(x_M; y_M)$ est connu en repère local et on veut obtenir ses coordonnées $(X_M; Y_M)$ en repère général.

On connaît les coordonnées dans le repère général de l'origine $O'(X_{O'}; Y_{O'})$ du repère local ainsi que le gisement G de l'axe des ordonnées du repère local dans le repère général.

Dans une premier temps, on effectue une rotation de repère d'angle $G = -\alpha$. Puis on effectue une translation de vecteur $O'O$ connu dans le repère (O, X, Y) , donc :

$$\begin{matrix} M & \begin{cases} X_M = X_{O'} + x'_M \cdot \cos G - y'_M \cdot \sin G \\ Y_M = Y_{O'} + x'_M \cdot \sin G + y'_M \cdot \cos G \end{cases} \end{matrix}$$

La notation matricielle (voir § 8.3.) donne : $M \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{O'} \\ Y_{O'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos G & -\sin G \\ \sin G & \cos G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \end{pmatrix}$.

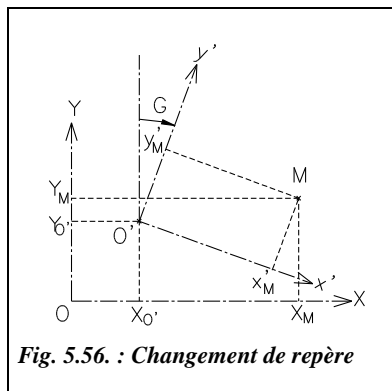


Fig. 5.56. : Changement de repère

8.2.5 Programmation en basic standard



```
5 PRINT "Translation puis rotation de repère"
10 INPUT "Angle de rotation (sens trigo, gon) : " ; A
20 PRINT "Coordonnées actuelles de la nouvelle origine :"
```

```

30 INPUT "X= ";XO : INPUT "Y= ";YO
50 INPUT "Nombre de points à calculer ";N : REM Nombre de points à calculer
60 FOR I=1 TO N : PRINT "Point N° ";I : REM Début de la boucle de calcul
80 INPUT "X= ";X : INPUT "Y= ";Y
100 PRINT "Nouvelle Abscisse ";
105 PRINT (X-XO)*COS(A)+(Y-YO)*SIN(A)
110 PRINT "Nouvelle Ordonnée ";
115 PRINT (Y-YO)*COS(A)-(X-XO)*SIN(A)
120 NEXT I : END

```

Ce listing est fourni sur le cédérom de l'ouvrage (fichier ROTATRAN.BAS) pour fonctionner avec le programme QBASIC.EXE.

8.2.6 Écriture d'un tableau



Avec cet exemple simple, nous allons voir comment bâtir facilement et rapidement un tableau de calcul sous EXCEL. Démarrez le programme EXCEL sous Windows, puis menu FICHIER / NOUVEAU pour commencer une nouvelle feuille vide.

	A	B	C	D	E	F
1	Angle de rotation (sens trigo, grades) :				-18,767	
2						
3	Coordonnées de la nouvelle origine dans l'ancien repère :					
4	(ou vecteur de translation			Xo (m) =	-3,140	
5				Yo (m) =	9,880	
6						
7	Coordonnées		Coord. après translat.		Coord. après rotation	
8	X (m)	Y (m)	X' (m)	Y' (m)	X''(m)	Y'' (m)
9						
10	110,2	78,77	113,26	68,89	88,36	98,82
11	-6,28	19,76	-3,14	9,88	-5,88	8,54
12	-35,23	3,93	-32,09	-5,95	-28,98	-15,02
13	-1,58	57,44	1,56	47,56	-12,32	45,96
14	35,20	40,07	38,34	30,19	27,91	40,02
15	27,34	13,48	30,48	3,60	28,12	12,30

Entrez tous les textes et données comme sur l'exemple ci-dessus : cliquez dans une case, tapez le texte ou la valeur et validez par ENTRÉE. Les textes sont en noir, les données en bleu, les résultats de formules en rouge et en italique.

Entrez en case C10 la formule suivante : $= A10 - E\$4$ ↵

Entrez en case D10 la formule suivante : $= B10 - E\$5$ ↵

Entrez en case E10 la formule suivante : $= C10 * \cos(E\$1 * \pi() / 200) + D10 * \sin(E\$1 * \pi() / 200)$ ↵

Entrez en case F10 la formule suivante : $= D10 * \cos(E\$1 * \pi() / 200) - C10 * \sin(E\$1 * \pi() / 200)$ ↵

Sélectionnez les cases C10 à F15 et cliquez l'option RECOPIER / VERS LE BAS du menu EDITION (ou tapez CONTROL B) ; les formules se recopient en s'adaptant : seules les références précédées d'un \$ ne changent pas.

Voir aussi le tableau HELMERT.XLS dans lequel une feuille effectue ces calculs.

8.2.7 Résolution graphique sur Autocad IT



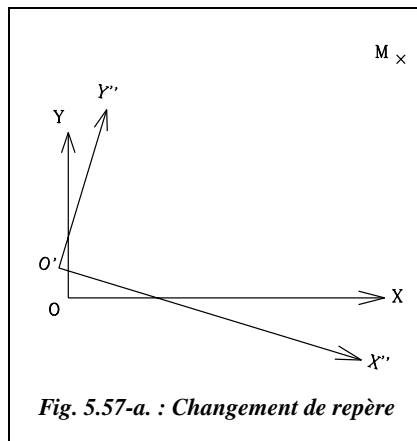
Environnement de travail : angles en grades, sens de rotation trigonométrique, zéro sur l'axe des abscisses (à l'est) ; ces réglages sont effectués dans la case de dialogue CONTROLE DES UNITES du menu FORMAT (commande DDUNITS).

Dessinez le point M dans le repère général :
POINT ↵ 110.12 , 78.77 ↵

Changez de repère : commande *SCU* ↵, option *Origine* ↵ au point -3.14 , 9.88 ↵. Répétez la commande *SCU* ↵ option *Z* ↵ (angle de rotation autour de l'axe des Z), angle (gon) -18.767 ↵

Demandez les coordonnées du point M dans le nouveau repère par la commande *ID* ↵. Ces coordonnées s'affichent en bas de l'écran texte.

Si vous voulez d'autres points, sauvegardez le SCU actuel (*SCU* / *Sauvegarder*), dessinez les autres points dans le repère général (retour au SCU général par *SCU* ↵ ↵), rappelez le SCU précédent pour les identifier (*SCU* / *Restaurer*).



8.2.8 Changement de repère dans l'espace à trois dimensions

Un changement de repère dans l'espace peut se décomposer en trois translations et trois rotations indépendantes. On extrapole les formules valables en plan au cas général d'un changement de repère dans l'espace. Les angles de rotation sont donnés en sens positif trigonométrique (voir aussi la remarque relative à la figure 5.57-b.).

On cherche à exprimer dans un repère (O', x', y', z') les coordonnées d'un point M connu dans le repère (O, x, y, z).

8.2.8.1 Rotations puis translations

On applique simultanément trois rotations d'angles indépendants (rx , ry et rz) au vecteur $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M, z_M)$. On translate ensuite le vecteur obtenu d'un vecteur de translation (tx , ty , tz) qui représente l'opposé des coordonnées de l'ancienne origine dans le nouveau repère.

Le résultat est donné par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \\ z'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos rx & \sin rx \\ 0 & -\sin rx & \cos rx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos ry & 0 & -\sin ry \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin ry & 0 & \cos ry \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos rz & \sin rz & 0 \\ -\sin rz & \cos rz & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$$

En développant et en notant $\cos rx = cx$, $\sin rx = sx$, etc., on obtient :

$$x'_M = x_M \cdot (cy \cdot cz) + y_M \cdot (cy \cdot sz) - z_M \cdot (sy) - (tx)$$

$$y'_M = x_M \cdot (sx \cdot sy \cdot cz - cx \cdot sz) + y_M \cdot (sx \cdot sy \cdot sz + cx \cdot cz) + z_M \cdot (sx \cdot cy) - (ty)$$

$$z'_M = x_M \cdot (cx \cdot sy \cdot cz + sx \cdot sz) + y_M \cdot (cx \cdot sy \cdot sz - sx \cdot cz) + z_M \cdot (cx \cdot cy) - (tz)$$

8.2.8.2 Translations puis rotations

On translate le vecteur $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M, z_M)$ d'un vecteur de translation (tx , ty , tz) qui représente les coordonnées de la nouvelle origine dans l'ancien repère. On applique ensuite successivement les trois rotations d'angles (rx , ry et rz) au vecteur translaté.

Le résultat est donné par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \\ z'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos rx & \sin rx \\ 0 & -\sin rx & \cos rx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos ry & 0 & -\sin ry \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin ry & 0 & \cos ry \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos rz & \sin rz & 0 \\ -\sin rz & \cos rz & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_M - tx \\ y_M - ty \\ z_M - tz \end{pmatrix}$$

En développant et en notant $\cos rx = cx$, $\sin rx = sx$, etc., on obtient :

$$x'_M = (x_M - tx) \cdot (cy \cdot cz) + (y_M - ty) \cdot (cy \cdot sz) - (z_M - tz) \cdot (sy)$$

$$y'_M = (x_M - tx) \cdot (sx \cdot sy \cdot cz - cx \cdot sz) + (y_M - ty) \cdot (sx \cdot sy \cdot sz + cx \cdot cz) + (z_M - tz) \cdot (sx \cdot cy)$$

$$z'_M = (x_M - tx) \cdot (cx \cdot sy \cdot cz + sx \cdot sz) + (y_M - ty) \cdot (cx \cdot sy \cdot sz - sx \cdot cz) + (z_M - tz) \cdot (cx \cdot cy)$$

Attention : les formules précédentes ne sont valables que pour des angles de rotation indépendants ou angles d'Euler. Les angles de rotation sont exprimés dans le repère d'origine ; en effet, si l'on effectue les rotations successivement, le résultat sera différent : il dépend alors de l'ordre dans lequel on effectue ces rotations.



Excel 7

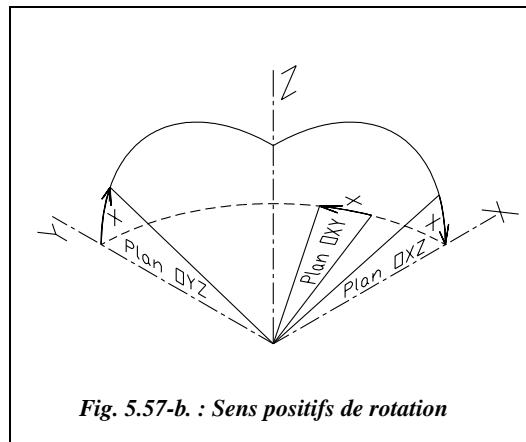
Le tableau HELMERT.XLS permet d'effectuer ce type de transformation (voir aussi au chapitre 1, paragraphe 10.3.3., une application à un changement de système géodésique par transformation à sept paramètres).

Attention au signe des rotations : le sens positif de rotation dans un plan OXY, OXZ ou OYZ est donné par la règle dite du « tire-bouchon » (fig. 5.57-b.).

Dans le plan OXY, si le repère tourne autour de l'axe des Z dans le sens horaire, un tire-bouchon d'axe OZ se déplacerait suivant les Z négatifs. Le sens positif de rotation dans ce plan est donc le sens trigonométrique.

Les mêmes remarques sont applicables au plan OYZ.

Dans le plan OXZ, lors d'une rotation en sens horaire autour de l'axe OY, le tire-bouchon se déplace dans le sens des ordonnées positives. Dans ce cas, le sens positif de rotation est le sens horaire.



Remarque

Pour des angles de rotation très petits et exprimés en radian, on peut écrire : $\sin \alpha \approx \alpha$ et $\cos \alpha \approx 1$; on obtient donc, en négligeant les termes du deuxième ordre, la matrice

simplifiée suivante pour la combinaison des trois rotations :

$$\begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix}.$$

rx , ry et rz sont donnés en radians et en sens positif trigonométrique.

8.2.8.3 Applications

1 - Calculez les coordonnées du point M' transformé du point M de coordonnées (5 m, -7 m, 11 m) par translation de vecteur (5 m, -2 m, 15 m) puis rotations d'angles ($rx = 12^\circ$, $ry = 35^\circ$, $rz = 44^\circ$). Même calculs pour les points N (0 m ; 12 m ; 26 m) et P (-2 m ; 8 m ; 7 m).

2 - En partant des points M , M' , N , N' , P et P' connus dans les repères avant et après transformation, retrouvez les valeurs des translations et des rotations appliquées aux deux repères.

Réponse

1 - $M'(-0,551 \text{ m} ; -4,614 \text{ m} ; -4,406 \text{ m})$; $N'(-1,289 \text{ m} ; 15,852 \text{ m} ; 9,436 \text{ m})$; $P'(6,154 \text{ m} ; 10,658 \text{ m} ; -7,844 \text{ m})$.

2 - Il faut résoudre un système de neuf équations à six inconnues. On peut donc *a priori* se contenter de deux points. Une solution rapide et facile à mettre en œuvre est l'utilisation du solveur d'Excel comme au paragraphe 10.3.3. du chapitre 1.

8.3 Rappels sur les matrices

Les matrices sont des outils très pratiques dans la manipulation de vecteurs (que ce soit en plan ou dans l'espace). Elles permettent de simplifier les notations et de rendre les calculs systématiques et donc faciles à informatiser.

8.3.1 Notation matricielle

Une matrice est caractérisée par son nombre de lignes et de colonnes. Nous utiliserons essentiellement :

- dans le plan, des matrices deux lignes, deux colonnes : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Dans le paragraphe 8.2.3. sont données les matrices de rotation en plan autour de l'axe perpendiculaire à ce plan.

- dans l'espace, des matrices trois lignes, trois colonnes : $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

Dans le paragraphe 8.2.8. sont données les matrices de rotation autour d'un axe dans l'espace à trois dimensions.

Un **vecteur** peut aussi être considéré dans l'espace comme une matrice trois lignes, une colonne ou bien dans le plan, comme une matrice deux lignes, une colonne.

8.3.2 Opérations sur les matrices

On peut effectuer, entre-autres, les opérations suivantes sur des matrices :

- **Addition** de matrices : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$

- **Multiplication** d'une matrice par un vecteur :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+dy+gz \\ bx+ey+hz \\ cx+fy+iz \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

Remarquez que le produit d'une matrice par un vecteur donne un vecteur.

Des applications de cette opération sont données aux paragraphes 8.2.3., 8.2.4. et 8.2.8.

- **Produit vectoriel** : le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} donne un troisième vecteur perpendiculaire au plan défini par les vecteurs \vec{A} et \vec{B} . Ses composantes sont :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_A Z_B - Z_A Y_B \\ Z_A X_B - X_A Z_B \\ X_A Y_B - Y_A X_B \end{pmatrix}$$

Remarquez les permutations circulaires d'indices d'une ligne à l'autre.

8.3.3 Déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice est un nombre qui la caractérise. Il est calculé ainsi :

$$\text{Dét} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a.d - b.c \quad ; \quad \text{Dét} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = a.(e.i - f.h) - d.(b.i - c.h) + g.(b.f - c.e).$$

Application : la norme du produit scalaire d'un vecteur \vec{A} par le vecteur issu du produit vectoriel $\vec{B} \wedge \vec{C}$ est le déterminant de la matrice formée par ces trois vecteurs.

$$\text{Soit : } |\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})| = \text{Dét} \begin{pmatrix} X_A & X_B & X_C \\ Y_A & Y_B & Y_C \\ Z_A & Z_B & Z_C \end{pmatrix}$$

Rappel : le produit scalaire de deux vecteurs noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$ est un nombre qui représente la longueur projetée du vecteur A sur le vecteur B ; il a pour valeur $(X_A \cdot X_B + Y_A \cdot Y_B + Z_A \cdot Z_B)$.

8.3.4 Applications

La théorie des matrices trouve, en topographie, les applications suivantes :

- **Résolution d'un système** de trois équations à trois inconnues (généralisable à l'ordre n). Soit à résoudre le système ci-après :

$$\begin{cases} aX + b \cdot y + cZ + d = 0 \\ eX + fY + gZ + h = 0 \\ iX + jY + kZ + l = 0 \end{cases}$$

X , Y et Z sont inconnues et peuvent être déterminées directement par :

$$X = \frac{Dét_X}{Dét} \text{ avec } Dét_X = \text{Det} \begin{pmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{pmatrix} \text{ et } Dét = \text{Dét} \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

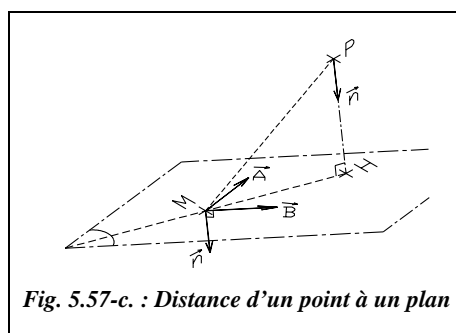
$$Y = \frac{Dét_Y}{Dét} \text{ avec } Dét_Y = \text{Det} \begin{pmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{pmatrix} \text{ et } Z = \frac{Dét_Z}{Dét} \text{ avec } Dét_Z = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{pmatrix}$$

Une application de ces formules est donnée dans les tableaux de calcul aux moindres carrés du chapitre 1.

• **Distance d'un point à un plan :**

La distance PH d'un point P à un plan défini par deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} concourants en un point M s'exprime par :

$$PH = \frac{\text{Dét}(\vec{PM}, \vec{A}, \vec{B})}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}$$



PH est le rapport du déterminant de la matrice 3 lignes, 3 colonnes formée des trois vecteurs $(\vec{PM}, \vec{A} \text{ et } \vec{B})$ par la norme du produit vectoriel de \vec{A} par \vec{B} .

$$\text{Démonstration : } PH = \left| \vec{PM} \cdot \vec{n} \right| = \left| \vec{PM} \cdot \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|} \right| = \frac{\text{Dét}(\vec{PM}, \vec{A}, \vec{B})}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}$$

\vec{n} est un vecteur normal unitaire.

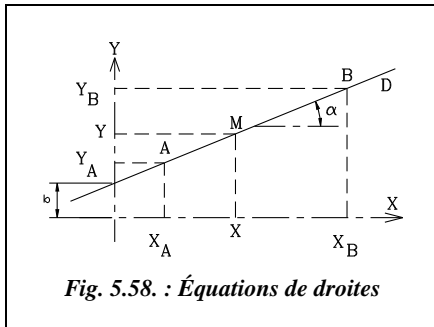
Une application de cette formule est détaillée au chapitre 7 du tome 1, paragraphe 1.4.2.

9 ÉQUATIONS DE DROITES

9.1 Droite donnée par deux points et interpolation linéaire

9.1.1 Équation d'une droite donnée par deux points

Il existe deux manières d'écrire l'équation de la droite D (fig. 5.58.) :



1- directement :
$$\frac{X - X_A}{Y - Y_A} = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$$

2- par l'équation type : $Y = aX + b$

a et b sont obtenus par la résolution du système suivant : $Y_A = aX_A + b$

$$Y_B = aX_B + b$$

Le coefficient directeur de cette droite est noté a :

$$a = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \tan \alpha$$

L'ordonnée à l'origine de cette droite est noté b :

$$b = Y_A - a \cdot X_A$$

Application

L'équation de la droite passant par A(12,21 m ; 17,45 m) et B(65,47 m ; 44,44 m) est : $Y = a \cdot X + b$ avec $a = 0,5068$ et $b = 11,26$ m ; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 5.

9.1.2 Interpolation linéaire

Le cas de la figure 5.58. correspond aussi à la résolution d'une interpolation linéaire (communément appelée règle de trois) : on connaît l'abscisse X_M d'un point M de la droite AB, on cherche son ordonnée Y_M .

Le résultat est donné par la formule suivante :

$$Y_M = Y_A + (X_M - X_A) \cdot \frac{(Y_B - Y_A)}{(X_B - X_A)}$$

Exemple

Déterminez l'altitude H d'un point M situé au point kilométrique 125,124 km sur une route rectiligne définie par les deux points A et B suivants :

- A d'altitude 130,231 m situé au point kilométrique 124,321 km ;
- B d'altitude 121,881 m situé au point kilométrique 127,006 km.

Réponse

$$H_M = 130,231 + (125,124 - 124,321) \cdot \frac{121,881 - 130,231}{127,006 - 124,321} = 127,734 \text{ m.}$$



Programmation en BASIC standard

L'interpolation linéaire peut être programmée ainsi :

```
10 INPUT "Abscisse du point 1 ";X1 : INPUT "Ordonnée du point 1 ";Y1
20 INPUT "Abscisse du point 2";X2 : INPUT "Ordonnée du point 2 ";Y2
30 INPUT "Abscisse du point cherché ";X
40 PRINT "Ordonnée du point cherché : "; Y1+(X-X1)*(Y2-Y1)/(X2-X1)
```

9.2 Droite de pente connue, passant par un point

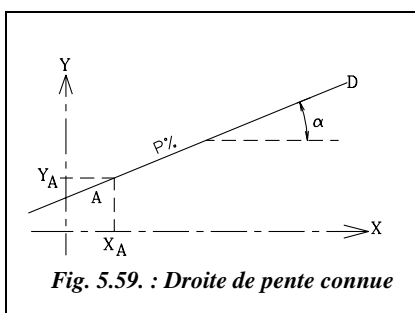


Fig. 5.59. : Droite de pente connue

Les données sont le point A (X_A , Y_A) et la pente p (par exemple 25 %, $p = 0,25$).

Par définition, on a : $a = p$ (coefficient directeur de la droite).

Il reste à résoudre ($Y_A = a \cdot X_A + b$) qui permet d'obtenir b .

$$\begin{aligned} a &= p = \tan \alpha \\ b &= Y_A - p \cdot X_A \end{aligned}$$

Application

Donnez l'équation de la droite de pente $p = 20$ % passant par le point A (12,21 m ; 17,45 m).

Réponse

$Y = a \cdot X + b$ avec $a = 0,20$, soit $\alpha = 12,567$ gon et $b = 15,01$ m ; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 8.5.

9.3 Droite perpendiculaire à une autre droite

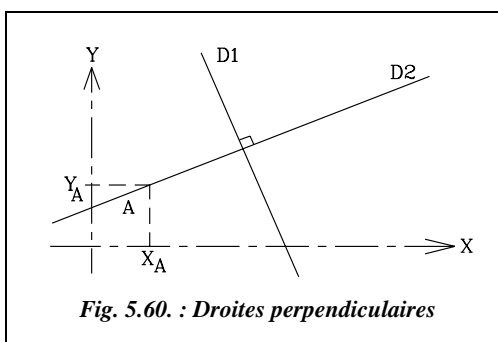


Fig. 5.60. : Droites perpendiculaires

On connaît la droite D_1 d'équation : $Y = a \cdot X + b$; on cherche l'équation de D_2 perpendiculaire à D_1 et passant par le point A(X_A , Y_A).

Le coefficient directeur de D_2 est $-1/a$.

L'équation de D_2 s'écrit : $Y = -1/a \cdot X + c$.

c est donné par $Y_A = -1/a \cdot X_A + c$.

Donc l'équation de D_2 est :

$$Y = -\frac{1}{a}X + \left(Y_A + \frac{X_A}{a}\right)$$

Application

Donnez l'équation de la droite D_2 passant par le point $A(33,94 \text{ m} ; 78,36 \text{ m})$ et perpendiculaire à la droite D_1 d'équation $Y = 0,25x + 14,40$.

Réponse

$Y = a.X + c$ avec $a = -4$ et $c = 214,12 \text{ m}$; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 9.5.

9.4 Droite parallèle à une autre droite

On cherche l'équation de la droite D_2 passant par le point $A(X_A, Y_A)$ et parallèle à la droite D_1 d'équation $Y = a . X + b$.

Le coefficient directeur de D_2 est a .

L'équation de D_2 s'écrit $Y = a . X + c$.

La résolution de $Y_A = a . X_A + c$ donne c .

Donc l'équation de D_2 est :

$$Y = a . X + (Y_A - a . X_A)$$

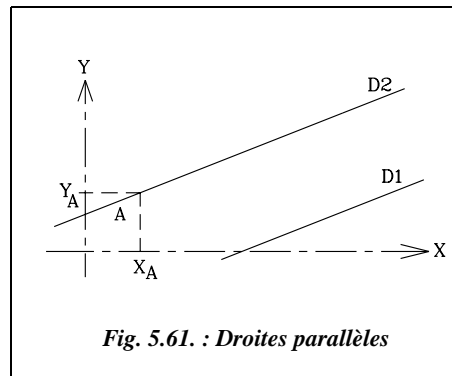


Fig. 5.61. : Droites parallèles

Application

Avec les données du paragraphe 9.3., trouvez la droite D_2 parallèle à la droite D_1 et passant par le point A.

Réponse

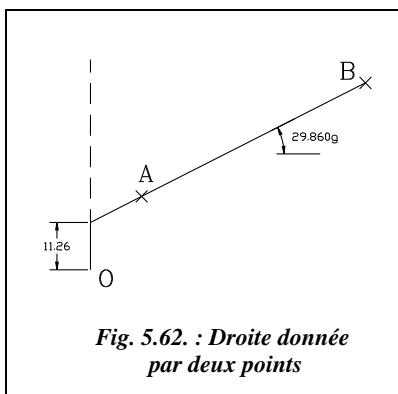
$Y = a.x + c$ avec $a = 0,25$ et $c = 69,88 \text{ m}$; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 9.5.

9.5 Construction graphique



L'environnement de travail est le suivant : angles en grades, zéro sur l'axe des abscisses (à l'est), sens trigonométrique.

◆ **Premier exercice : § 9.1.**



Dessinez directement la droite AB : **LIGNE** du point 12.21,17.45 au point 65.47,44.44

La commande **LISTE** donne des informations sur tout objet dessiné. En cliquant sur la droite AB, elle fournit la valeur de l'angle α , à 200 grades près suivant le sens dans lequel elle a été dessinée (de A vers B ou de B vers A).

On lit $\alpha = 29.860$ gon, soit $a = \tan \alpha = 0.5068$.

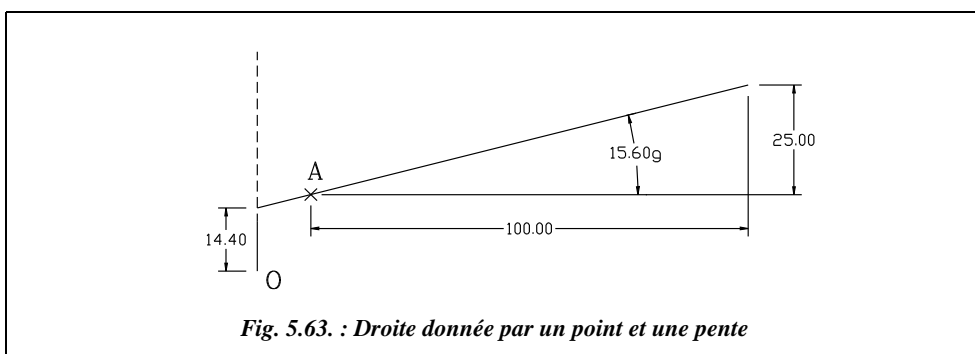
Obtenir b n'est pas immédiat et rarement indispensable. Nous vous présentons une solution possible pour l'exemple.

Construisez l'axe des Y : **LIGNE** du point 0,0 au point 0,50. **CHANFREIN** entre la droite AB et l'axe des Y pour obtenir l'ordonnée à l'origine. **ID** **EXTrémité** de.... pour obtenir la valeur de l'ordonnée à l'origine : $b = 11.26$ m.

◆ **Deuxième exercice : § 9.2.**

Dessinez directement la droite en utilisant la définition d'une pente en pourcentage (25 %, soit 25 m en Y pour 100 m en X) : **LIGNE** du point 12.21,17.45 au point @100,25

Pour obtenir les valeurs de a et b , voir l'exemple précédent.



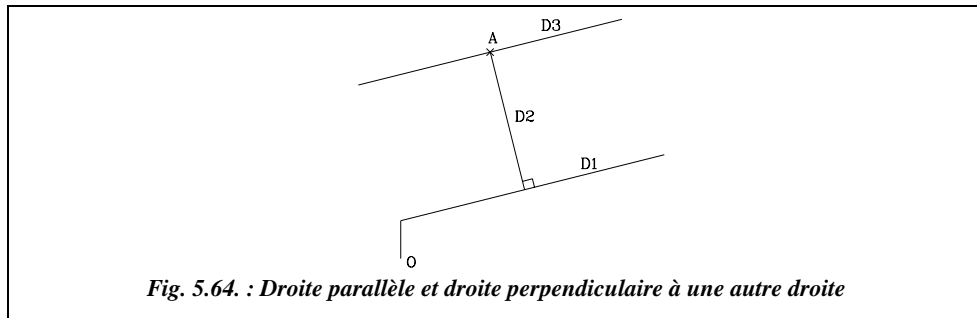
◆ **troisième et quatrième exercices : § 9.3. & 9.4.**

Dessinez la droite D_1 qui est donnée : **LIGNE** du point 0,14.40 au point 40,24.40.

Dessinez D_2 perpendiculaire à la droite D_1 : **LIGNE** du point 33.94,78.36 au point **PER**pendiculaire à... D_1 .

Dessinez D_3 parallèle à la droite D_1 : **COPIER** ↵ <choix des objets> cliquez sur la droite puis validez (↵), du point *MILieu* de... au point A *EXTrémité* de...

Pour obtenir les valeurs de a et b , voir le premier exemple.



10 LES ANGLES : UNITÉS ET CONVERSIONS

10.1 Définitions

10.1.1 Le radian (rad)

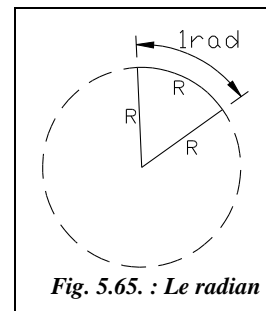
C'est l'angle au centre interceptant sur le cercle un arc de longueur égale à son rayon (fig. 5.65.).

Un angle de α_{rad} intercepte donc une longueur de $R \cdot \alpha_{\text{rad}}$ sur le cercle.

Le périmètre d'un cercle de rayon R est égal à $2 \cdot \pi \cdot R$.

La constante π peut être calculée ainsi :

$$\tan(\pi / 4) = 1 \text{ d'où } \pi = 4 \cdot \arctan(1) = 3,14159...$$



Application

Calculez au millimètre près la longueur de l'arc d'un demi-cercle de rayon 10 m.

Réponse

$$L = \pi \cdot 10 = 31,416 \text{ m.}$$

10.1.2 Le degré (deg ou °)

C'est la **360° partie du cercle**. Il est généralement exprimé en degrés décimaux (121,636°). On peut aussi l'exprimer en degrés sexagésimaux dont les sous-multiples sont :

- la **minute sexagésimale** : 1' vaut $1/60^\circ$
- la **seconde sexagésimale** : 1" vaut $1/60^\circ$ de minute soit $1 / 3\,600^\circ$

Application

- 1 - Transformez $121,636^\circ$ en degrés-minutes-secondes (la plupart des calculatrices permettent de le faire directement au moyen d'une fonction pré-programmée).
- 2 - Transformez $35^\circ 12' 28''$ en degrés décimaux.
- 3 - Combien mesure un mile marin sachant qu'il intercepte un arc de méridien de 1' ?

Réponses

- 1 - $0,636^\circ$ sont $0,636 \cdot 60 = 38,16$ minutes et $0,16$ minutes sont $0,16 \cdot 60 = 9,6$ secondes ;
la réponse est donc : $121^\circ 38' 10''$.
- 2 - $35 + 12 / 60 + 28 / 3\,600 \approx 35,208^\circ$.
- 3 - Avec un rayon moyen de $R = 6\,367$ km, $1 \text{ mile} = 6\,367 \cdot 2\pi / 360 / 60 = 1,852$ km.

10.1.3 Le grade (symbole : gon)

Le terme « grade » représente l'unité, « gon » est sa notation ; c'est par définition la **400^e partie du cercle**. C'est l'unité usuelle du topographe.

On utilise aussi souvent les sous-multiples du grade, à savoir : décigrade (**dgon**), centigrade (**cgon**), milligrade (**mgon**), décimilligrade (**dmgon**).

Un cgon est aussi une **minute centésimale** ($1/100^\circ$ de grade), notée `.

Un dmgon est aussi une **seconde centésimale** ($1/10\,000^\circ$ de grade), notée ``.

Attention : ne pas confondre la notation des minutes ou secondes sexagésimales (' et ") avec la notation des minutes ou secondes centésimales (` et `` : l'orientation des apostrophes est inversée). Ces notations sont d'ailleurs à éviter absolument pour ne garder que les sous-multiples du grade.

10.2 Conversions

Elles sont faites par règle de trois à partir des égalités suivantes : $2\pi_{\text{rad}} = 360^\circ = 400 \text{ gon}$

Application

- 1 - Convertissez $96^\circ 18' 46''$ en grade puis en radian.
- 2 - Sur la documentation Leica du T2, on lit : écart type = 0,8" ; traduisez en gon.

Réponses

- 1 - $96 + 18/60 + 46/3\,600 = 96,313^\circ$. $400 / 360 = 107,014 \text{ gon}$. $\pi / 200 = 1,681 \text{ rad}$.
- 2 - $0,8 / 60 / 60 \cdot 400 / 360 = 0,00025 \text{ gon}$, soit 2,5 dmgon.

10.3 Ordres de grandeur

Il est bon de connaître les quelques ordres de grandeur suivants pour apprécier la précision des mesures angulaires réalisées sur le terrain avec les différents appareils de topographie. Certains théodolites permettent d'apprécier le dmgon.

Pour un angle ε petit et exprimé en radian, on peut écrire : $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ et $\cos \varepsilon \approx 1$.

Exemples : $\sin(0,1\text{rad}) = 0,0998$; $\sin(0,2\text{rad}) = 0,197$

$\cos(0,1\text{rad}) = 0,9995$; $\cos(0,2\text{rad}) = 0,980$

Comme $1 \text{ gon} \approx 1/64 \text{ rad}$, cela entraîne qu'un écart d'angle de 1 gon à une distance de 64 m donne 1 m en bout de visée.

De même, on a :

$1 \text{ cgon} \approx 1/6\,400 \text{ rad}$	$1 \text{ cgon à } 64 \text{ m donne } 1 \text{ cm}$
$1 \text{ mgon} \approx 1/64\,000 \text{ rad}$	$1 \text{ mgon à } 64 \text{ m donne } 1 \text{ mm}$
$1 \text{ dmgon} \approx 1/640\,000 \text{ rad}$	$1 \text{ dmgon à } 64 \text{ m donne } 1/10 \text{ mm}$

10.4 Caractéristiques d'une visée

10.4.1 Sensibilité d'une visée

Notée s , c'est le déplacement de l'extrémité de la visée pour une variation d'angle de 1 dmgon. La sensibilité s est proportionnelle à la portée de la visée, c'est-à-dire :

$$s_{\text{cm/dmgon}} = 100\,000 D_{\text{km}} \frac{\pi}{200} \cdot \frac{1}{10\,000}$$

s est exprimée en centimètre par décimilligrade.

Soit, en simplifiant :

$$s_{\text{cm/dmgon}} \approx 0,157 \cdot D_{\text{km}}$$

En changeant d'unité pour les angles, on obtient :

$$s_{\text{cm/mgon}} \approx 1,57 \cdot D_{\text{km}}$$

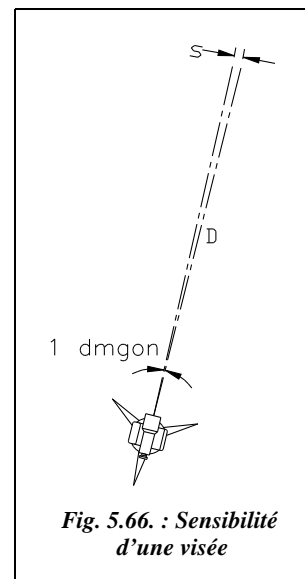


Fig. 5.66. : Sensibilité d'une visée

10.4.2 Déplacement d'une visée

C'est la valeur du déplacement de l'extrémité de la visée pour une variation d'angle Δ_{dmgon} .

$$d_{\text{cm}} = s_{\text{cm/dmgon}} \cdot \Delta_{\text{dmgon}}$$

Application

Calculez l'écart en centimètre que représente une erreur d'appréciation de 1 cgon à une distance de 500 m.

Réponse

$$d = 1,57 \cdot 0,5 \cdot 10 \approx 7,9 \text{ cm.}$$

11 CALCULS PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

11.1 Utilité de ce mode de calcul

Dans certains problèmes, les données sont telles qu'il est impossible, ou parfois seulement difficile, de résoudre directement, c'est-à-dire d'obtenir une formule « simple » donnant l'inconnue cherchée. Par formule simple, on entend une expression du type :

$X = f(a, b, c)$ où a , b et c sont des constantes du problème posé.

Deux cas peuvent se présenter :

- **Premier cas** : l'inconnue cherchée intervient dans l'équation finale sous sa forme simple X et dans un sinus, un cosinus, une tangente, etc.

Exemple : $2X + \cos X = 5$. Cela est impossible à résoudre directement.

Une application de ce type de calcul à la résolution d'une équation du troisième degré est traitée au chapitre 4 du tome 1, paragraphe 2.3.5 ; cela est utile si on ne dispose pas des racines de ce type d'équation.

- **Deuxième cas** : la complexité du problème fait que l'on n'arrive pas (c'est peut-être impossible) à obtenir une expression de l'inconnue. On obtient une suite d'équations dans lesquelles les paramètres se reportent et se mélangent à des inconnues intermédiaires et à l'inconnue principale.

Pour résoudre ces deux types de problème, il existe une méthode de calcul numérique rigoureuse qui permet d'aboutir au résultat. Il est plus simple de la détailler sur des exemples.

Attention : le principe de la méthode de calcul repose sur la théorie mathématique des séries. Suivant l'équation à résoudre et suivant la valeur de départ choisie, la série peut ne pas converger. Dans cette dernière hypothèse, le résultat ne pourra pas être trouvé ; il faut alors soit chercher une nouvelle forme de l'équation à résoudre, soit changer de

technique de détermination : méthode de Newton, bissection des calculatrices (voir § 11.2.2.) ou bien fonction « valeur cible » d'Excel (voir § 11.2.4.).

11.2 Exemple de résolution par approximations successives

Dans cet exemple, on obtient une formule non soluble directement.

Considérons un point P à partir duquel on veut déterminer un alignement Px perpendiculaire à une direction Ay (fig. 5.67.).

Pour cela, on se fixe un point C sur l'alignement Ay et un point B milieu de [AC]. Depuis le point P, au moyen d'un théodolite, on mesure les angles :

APB = 34,651 gon, noté P_1 ;

BPC = 57,471 gon, noté P_2 ;

On cherche à calculer l'angle CPx permettant l'implantation de la direction Px directement depuis la station P.

Cette méthode peut aussi être utilisée pour construire une parallèle à Ay en cherchant l'angle Cpx – 100.

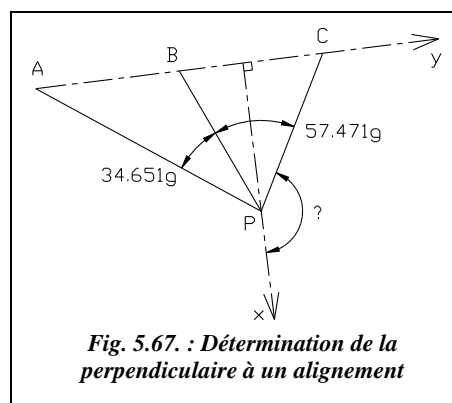


Fig. 5.67. : Détermination de la perpendiculaire à un alignement

11.2.1 Relation littérale permettant de calculer l'angle Cpx, noté X

Dans le triangle APB, on écrit : $\frac{\sin A}{BP} = \frac{\sin P_1}{AB}$.

De même, dans le triangle BPC : $\frac{\sin C}{BP} = \frac{\sin P_2}{BC}$.

Comme AB = BC, on obtient : $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin P_1}{\sin P_2}$.

Si l'on mène une parallèle à Ay passant par le point P, on peut écrire autour du point P : $300 = A + P_1 + P_2 + X$, d'où $A = 300 - (P_1 + P_2 + X)$ et $C = X - 100$.

Comme $\sin(300 - \alpha) = -\cos \alpha$ et $\sin(\alpha - 100) = -\cos \alpha$,

l'équation finale donnant X est :

$$\frac{\cos(P_1 + P_2 + X)}{\cos X} - \frac{\sin P_1}{\sin P_2} = 0$$

11.2.2 Résolution par approximations successives

La première étape est d'isoler l'inconnue X , par exemple en transformant l'équation

ainsi : (1) $X = \arccos\left[\frac{\sin P_1}{\sin P_2} \cdot \cos X\right] - (P_1 + P_2)$

Il reste à résoudre par approximations successives (voir le tableau suivant).

Le principe est de donner une valeur de départ à l'inconnue X , ce qui permet de calculer la partie droite de l'équation modifiée (1). Le résultat de ce calcul donne une valeur X' qu'il reste à comparer à X . Lorsque $X' = X$, la solution est trouvée.

La valeur de départ pour X est 150 gon.

A partir de la treizième itération (ligne 14), on constate que le troisième chiffre après la virgule ne varie plus. On peut donc considérer que le résultat est connu avec trois chiffres significatifs, ce qui correspond à la précision des données :

$$X = -31,536 \text{ gon}$$

Comme $\cos(200 + X) = -\cos X$, l'angle cherché est donc :

$$X = 168,464 \text{ gon}$$

	A	B
1	$X \text{ (gon)}$	$\arccos\left(\frac{\sin P_1}{\sin P_2} \cdot \cos X\right) - (P_1 + P_2)$
2	150,000	38,769
3	38,769	-28,515
4	-28,515	-32,655
5	-32,655	-31,100
6	-31,100	-31,704
7	-31,704	-31,472
8	-31,472	-31,561
9	-31,561	-31,527
10	-31,527	-31,540
11	-31,540	-31,535
12	-31,535	-31,537
13	-31,537	-31,536
14	-31,536	-31,536

Attention, on peut aussi obtenir l'équation : $X = \arccos\left[\frac{\sin P_2}{\sin P_1} \cdot \cos(P_1 + P_2 + X)\right]$.

Si vous essayez de trouver le résultat en partant de cette deuxième expression, vous constaterez que la méthode par approximations numériques ne donne pas de résultat : il existe un problème de convergence.



On peut contourner la difficulté au moyen d'une calculatrice possédant des fonctions préprogrammées de résolution d'équations. Par exemple, la fonction n° 5080 de la calculatrice FX850P qui est une résolution par la méthode de **Newton**. Il suffit d'entrer la fonction, de donner la valeur de départ puis de lancer le calcul pour obtenir un résultat. Une autre fonction utilisable, mais qui converge moins vite, est la bisection (fonction n° 5090).

Il existe encore une difficulté : cette équation n'aboutit à un résultat que pour certaines valeurs de départ correctement choisies pour X . En effet, utiliser la fonction $\arccos()$ implique de respecter son domaine de définition : $\arccos Y$ n'existe que pour $Y \in]-1, 1[$, il faut donc choisir la valeur de départ pour X telle que la fonction $\arccos(f(X))$ soit définie. Dans cet exemple, il faut choisir ($162,022 < X < 253,734$) ou ($-37,978 < X < 53,734$ gon).

11.2.3 Exemple de programmation de cette résolution en basic



Le programme suivant permet de résoudre ce problème sur une calculatrice programmable en Basic standard.

```
10 INPUT "Valeur de départ"; VD : REM entrée de la valeur de départ
15 INPUT "Nombre de chiffres après la virgule"; P : REM précision désirée
20 A = 34.561 + 57.471 : Y = VD : REM constantes de départ
50 X = ARCCOS(SIN(34.651) / SIN(57.471) * COS(Y)) - A : REM équation
60 IF ABS(X-Y) < 10^(-1*P) THEN GOTO 80 : REM si précision requise atteinte
70 Y = X : GOTO 50 : REM sinon faire une nouvelle itération
80 PRINT " X= "; INT(X*10^P) / 10^P : END
```

11.2.4 Utilisation d'un tableur pour résoudre ce problème



Démarrez Excel et placez (comme dans le tableau du paragraphe 11.2.2.) en case A2 la valeur de départ 150 gon. En case B2, inscrivez la formule suivante :

$$= \text{ACOS}(\text{SIN}(34,651 * \text{PI}() / 200) / \text{SIN}(57,471 * \text{PI}() / 200) * \text{COS}(A2 * \text{PI}() / 200)) * 200 / \text{PI}() - 34,561 - 57,471 \downarrow$$

Recopiez la formule vers le bas sur 15 lignes. En case A3, inscrivez = B2 \downarrow et recopiez vers le bas sur 14 lignes. Réglez le nombre de chiffres après la virgule à trois sur les deux colonnes pour faire apparaître la valeur finale.

Autre solution : utilisez la fonction « valeur cible » (ou encore le solveur) d'Excel qui permet de faire varier un paramètre dans une équation jusqu'à obtenir une valeur désirée.

Inscrivez en case A1 une valeur de départ (quelconque) : =50 \downarrow

Inscrivez en A2 la formule :

$$= \text{COS}((34,651 + 57,471 + A1) * \text{PI}() / 200) / \text{COS}(A1 * \text{PI}() / 200) - \text{SIN}(34,651 * \text{PI}() / 200) / \text{SIN}(57,471 * \text{PI}() / 200) \downarrow$$

En restant sur la case A2, sélectionnez la fonction valeur cible du menu outils et donnez comme cellule à définir A2, comme valeur cible 0 et comme cellule à modifier A1. Le résultat est A1 = -31,5359137 gon.

Réponse

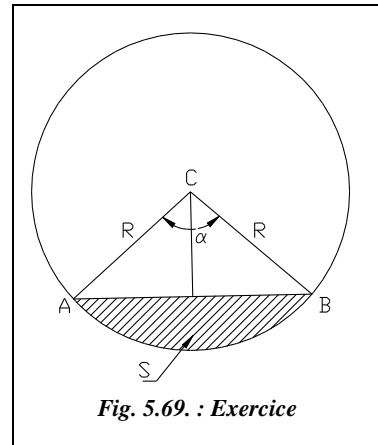
Si l'on note X la longueur de l'arc \widehat{AB} ,

$$S = \frac{\alpha_{\text{radian}}}{2\pi} \pi R^2 - \frac{R^2 \cdot \sin \alpha_{\text{radian}}}{2}$$

$$\text{donc } 2S = R^2 (\alpha_{\text{radian}} - \sin \alpha_{\text{radian}})$$

$$\text{comme } \widehat{AB} = X = R \alpha_{\text{radian}}$$

$$\text{on obtient } 2S = R^2 \left[\frac{X}{R} - \sin \left(\frac{X}{R} \right) \right]$$



Le tableau ci-contre détaille la résolution par approximations successives, X est demandé au millimètre près ; on note $X' = \frac{2S}{R} + R \cdot \sin \left(\frac{X}{R} \right)$. On prend 8,2 comme valeur de départ, valeur proche du rayon R .

Résultat : $X = 8,259$ m.

Remarquez qu'il est nécessaire de faire les calculs avec quatre chiffres significatifs pour être sûr de la précision du troisième. En effet, si l'on s'arrête à trois chiffres, on trouve un résultat inexact de 8,258 dès la septième ligne. Pour retrouver la précision de la surface S , il faut aller jusqu'à $X = 8,2588636$ m.

D'autres exercices utilisant cette méthode de calcul sont détaillés dans l'ouvrage :

- division de surfaces (voir chap. 4, § 2.3.2.) ;
- tension d'un ruban (voir tome 1, chap. 4, § 2.3.6.) ;
- transformation de coordonnées (voir tome 1, chap. 2, § 3.4.6.).

$X =$	$X' =$
8,2000	8,2272
8,2272	8,2418
8,2418	8,2497
8,2497	8,2540
8,2540	8,2562
8,2562	8,2575
8,2575	8,2581
8,2581	8,2585
8,2585	8,2586
8,2586	8,2587
8,2587	8,2588
8,2588	8,2588
8,2588	8,2588
8,2588	8,2589
8,2589	8,2589
8,2589	8,2589

12 THÉORIE DES ERREURS

12.1 Mesures topométriques : terminologie

La topographie exige l'observation de nombreuses mesures. Considérons la distance entre deux points parfaitement et très précisément définis : cette distance est unique et n'a qu'une valeur nommée **valeur vraie**. C'est une valeur utopique qu'il est impossible de connaître. Si nous mesurons plusieurs fois cette distance, nous obtenons des **résultats de mesurage** non tous identiques ; ces valeurs seront des valeurs approchées de la valeur vraie et celle que l'on retiendra, dans ce cas la moyenne arithmétique, sera nommée la **valeur conventionnellement vraie** de la distance.

Les mesures donnent des valeurs non toutes identiques parce que :

- 1 - les observations sont effectuées par des personnes et non des robots : les gestes et manipulations ne sont donc pas à chaque fois absolument identiques ;
- 2 - les conditions des observations changent : les variations de températures modifient la longueur d'une chaîne en acier, les différences de pression atmosphérique perturbent les ondes des distancemètres, etc. ;
- 3 - les instruments, aussi précis soient-ils, de conception et de fabrication humaine, sont forcément entachés d'erreurs : non perpendicularité des axes d'un théodolite, défauts dans les graduations du limbe, défaut d'horizontalité de l'axe optique d'un niveau, etc.

L'analyse de ces erreurs permet de se rendre compte que :

- certaines sont systématiques car inévitables (celles citées en 2 et 3 par exemple) ; en fait, on peut les connaître et souvent les éliminer par des procédés de mesurage ou tout simplement en les évaluant ;
- d'autres, en revanche, sont aléatoires ; on dit qu'elles sont accidentelles (celles citées en 1) : elles dépendent essentiellement des opérateurs.

Le problème du topomètre est donc de tenir compte de ces erreurs dans le résultat définitif de la grandeur mesurée et de définir jusqu'à quelles valeurs ces erreurs sont admissibles.

Il faut aussi combiner les erreurs commises sur les grandeurs mesurées (**mesures directes**) lorsque la grandeur cherchée est fonction de ces mesures.

Dans un premier temps, donnons la définition de certains termes normalisés par la norme *AFNOR NF X 07-00* :

- **le mesurage** est l'ensemble des opérations expérimentales ayant pour but de déterminer la valeur d'une grandeur. En topométrie, on utilise souvent le terme de **mesure**.

- **la méthode de mesurage** est le mode de comparaison utilisé. On distingue :
 - **le mesurage direct**, comparaison de la grandeur avec un étalon : par exemple mesurer une longueur avec un décamètre ou un angle avec un théodolite ;
 - **le mesurage indirect**, qui fournit le résultat de la grandeur par l'intermédiaire d'une formule faisant intervenir des mesures directes : par exemple la mesure de la surface d'un rectangle faisant intervenir la mesure de ses côtés ou encore la mesure d'une altitude en nivellement indirect faisant intervenir au moins une mesure de distance et une mesure angulaire.
- **la valeur vraie d'une grandeur** est la valeur qui caractérise une grandeur parfaitement définie : c'est une notion idéale qui ne peut généralement être connue.
- **la valeur conventionnellement vraie d'une grandeur** est la valeur approchée de la valeur vraie d'une grandeur ; la différence entre ces deux valeurs peut être négligée.
- **l'erreur de mesurage** est la discordance entre le résultat du mesurage et la valeur, que celle-ci soit vraie, conventionnellement vraie ou encore qu'elle soit la moyenne arithmétique d'une série de mesurages. Elle résulte des erreurs instrumentales, des erreurs d'observations commises par l'opérateur ainsi que des conditions d'observation : température, pression atmosphérique, humidité de l'air par exemple.
- **les fautes** ou erreurs parasites sont les erreurs grossières, non admissibles, qui résultent d'une exécution incorrecte du mesurage.

12.2 Les erreurs en topométrie

Les observations effectuées dans les opérations topographiques sont entachées d'inexactitudes plus ou moins importantes provenant de l'imperfection des sens, des instruments utilisés, des conditions atmosphériques, etc.

En améliorant les méthodes et les instruments, en répétant plusieurs fois les observations, les erreurs seront réduites, mais la valeur mathématiquement exacte ne sera jamais atteinte.

Les inexactitudes sont de deux natures différentes : les **fautes** et les **erreurs**.

12.2.1 Les fautes ou erreurs parasites

Ce sont des inexactitudes grossières qui proviennent de la maladresse des opérateurs et de leurs aides ainsi que de leurs négligences ; elles sont en général facilement décelables : faute de lecture sur un ruban, faute de lecture d'angle, faute de lecture sur la mire, etc. Il s'agit d'une faute lorsque la tolérance donnée pour les observations ou l'approximation donnée pour un instrument est dépassée.

Il faut se prémunir contre les fautes toujours possibles en se réservant un certain nombre de contrôles, par exemple, une longueur doit être mesurée au moins deux fois, à l'aller puis au retour, des réitérations sur la mesure des angles seront effectuées, etc.

12.2.2 Les erreurs

Ces inexactitudes sont absolument inévitables. Elles proviennent de l'imperfection des instruments utilisés, de l'imperfection des sens de l'individu.

Leur valeur est faible par rapport aux fautes et de toute façon obligatoirement inférieure à la tolérance. Mais quoique petite, la somme de ces erreurs donne aux résultats une inexactitude dont il est recommandé de se préoccuper.

Par exemple, une distance est mesurée à l'aide d'une chaîne comportant une erreur d'étalonnage ; cette erreur se reproduit à chaque portée avec la même valeur et le même signe. Une telle erreur est dite systématique : on peut la connaître en valeur et en signe. Supposons enfin que cette longueur soit chaînée sans prendre soin de s'aligner à chaque portée : on commet à chaque portée une erreur qui, quoique conservant le même signe, n'a pas la même valeur ; supposons enfin que, toujours pour déterminer cette même longueur, à l'extrémité de chaque portée les repères au sol n'aient pas été faits parfaitement en coïncidence avec la graduation de la chaîne, parfois avant, parfois après ; cette erreur, dite de tracé, se reproduit tantôt positive, tantôt négative.

De telles erreurs sont dites accidentelles ; elles ne peuvent être quantifiées.

12.2.2.1 Les erreurs systématiques

Ces erreurs se reproduisent toujours identiquement à elles-mêmes. Elles sont dues à une cause permanente connue ou inconnue. Il est toujours possible de la corriger soit par le calcul (par exemple la correction d'étalonnage d'un ruban, tome 1, chap. 4, § 2.3.) soit par un mode opératoire (par exemple le double retournement, tome 1, chap. 3, § 4.2.).

Les mesures topométriques consistent essentiellement en mesures de longueurs et en mesures d'angles. Nous allons rappeler ci-après quelques erreurs systématiques caractéristiques de ces types de mesures.

Pour les mesures de longueurs (voir tome 1, chap. 4)

- par chaînage, les erreurs systématiques sont essentiellement des erreurs d'étalonnage et, pour les éliminer, il faut apporter aux valeurs observées des corrections d'étalonnage ; ces corrections sont multiples : tensions, température, étalonnage proprement dit. C'est aussi l'erreur de chaînette, d'alignement et le défaut d'horizontalité ;
- par des IMEL (instruments de mesures électroniques des distances) : par exemple les distancemètres. Les erreurs systématiques sont l'erreur d'étalonnage et celles dues aux conditions atmosphériques, essentiellement la température et la pression.

Pour les mesures d'angles (voir tome 1, chap. 3)

- erreurs de collimation horizontale et verticale ;
- erreur de tourillonnement ;

- erreur d'excentricité de l'axe de rotation de l'alidade ;
- inégalité des graduations du limbe ;
- erreurs dues à la réfraction, etc.

12.2.2.2 *Les erreurs accidentelles*

Sont appelées accidentelles les erreurs qui ne présentent pas un caractère systématique, c'est-à-dire qui ne peuvent être ni calculées d'avance ni éliminées par la méthode opératoire ; elles sont dues à des causes fortuites ou non analysables ; on ne peut que constater leur existence et les subir.

Elles changent ou non de signe, mais changent continuellement de valeur. Détaillons ces erreurs pour les deux principaux types de mesures effectuées en topométrie, à savoir :

les mesures de longueurs

- par chaînage : ce sont essentiellement les erreurs de matérialisation de l'extrémité des portées et les erreurs de lecture ;
- par les IMEL : on retrouve certaines des erreurs de mesures d'angles ci-après ;

et les mesures d'angles : ce sont surtout les erreurs de centrage, de pointé, de lecture et de flamboiement de l'air.

On définit deux types d'erreur :

a - l'erreur absolue qui est la différence algébrique entre le résultat du mesurage et la valeur de comparaison. Suivant la valeur de comparaison utilisée, on distingue :

- **l'erreur absolue véritable e** qui est la différence algébrique entre le résultat du mesurage x et la valeur vraie μ :

$$e = x - \mu$$

- **l'erreur apparente v** , appelée **écart probable** en mesures directes et **résidu** en mesures indirectes, c'est la différence algébrique entre le résultat du mesurage x et la valeur conventionnellement vraie.

b - l'erreur relative qui est le quotient de l'erreur absolue par la valeur vraie ; c'est une valeur algébrique usuellement exprimée en pourcentage.

On ne peut pas tenir compte de l'erreur accidentelle sous forme d'une correction apportée au résultat du mesurage, mais, seulement à la fin d'une série de mesurages exécutés dans des conditions pratiquement identiques, on peut fixer les limites dans lesquelles se situe cette erreur avec une probabilité donnée. L'étude de ces limites constituent la théorie des erreurs accidentelles.

12.3 Modèle mathématique

Le calcul des probabilités permet d'estimer la valeur vraie par une valeur dite conventionnellement vraie et permet également d'évaluer l'incertitude sur cette valeur conventionnellement vraie.

12.3.1 Expérimentation

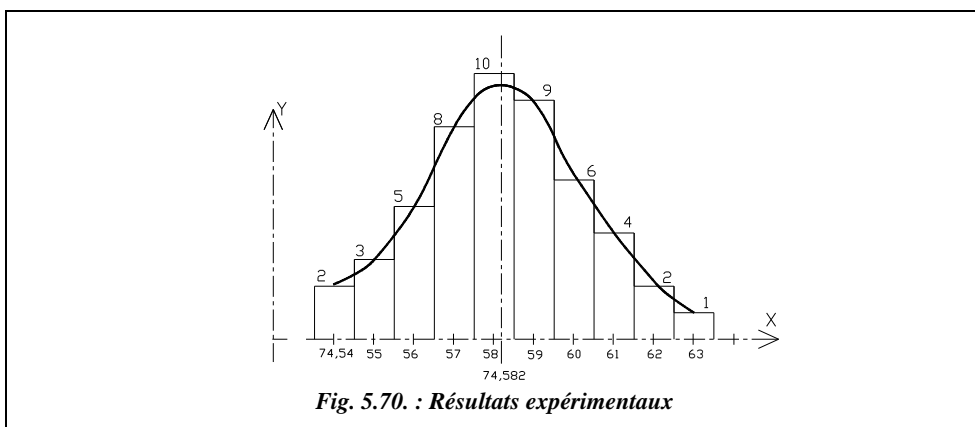
Reprenons, dans les mêmes conditions, un très grand nombre de fois la même mesure et reportons sur un axe orienté les résultats. Nous constatons que toutes les valeurs sont dispersées entre deux extrêmes et qu'entre ces deux bornes leur répartition n'est pas uniforme : la densité de ces mesures va en croissant d'un terme extrême inférieur jusque vers le milieu de l'intervalle complet, puis décroît jusqu'à une autre valeur extrême maximale en passant sensiblement par les mêmes valeurs. Si l'on indique sous chacune des valeurs le nombre de répétitions nous notons une accumulation vers le milieu de l'intervalle de répartition.

Calculons les indices de dispersion d'une série de mesurages directs.

Une longueur a été chaînée 50 fois de suite et on a noté les valeurs suivantes :

2	mesures à	74,54 m	9	mesures à	74,59 m
3	mesures à	74,55 m	6	mesures à	74,60 m
5	mesures à	74,56 m	4	mesures à	74,61 m
8	mesures à	74,57 m	2	mesures à	74,62 m
10	mesures à	74,58 m	1	mesures à	74,63 m

Représentons graphiquement (fig. 5.70.) les résultats obtenus : on réalise un histogramme des mesures effectuées en portant sur un axe horizontal les mesures et au droit de chaque intervalle ainsi défini on peut construire des rectangles dont la surface est égale au nombre de mesures. Si l'on trace la courbe en laissant des aires sensiblement égales à l'intérieur et à l'extérieur de chaque rectangle, on obtient la courbe de la figure 5.70.



Cette courbe est très proche d'une courbe qui est symétrique par rapport à la droite d'abscisse 74,582 m, valeur la plus probable ou moyenne arithmétique, et qui a la forme d'une « cloche ».

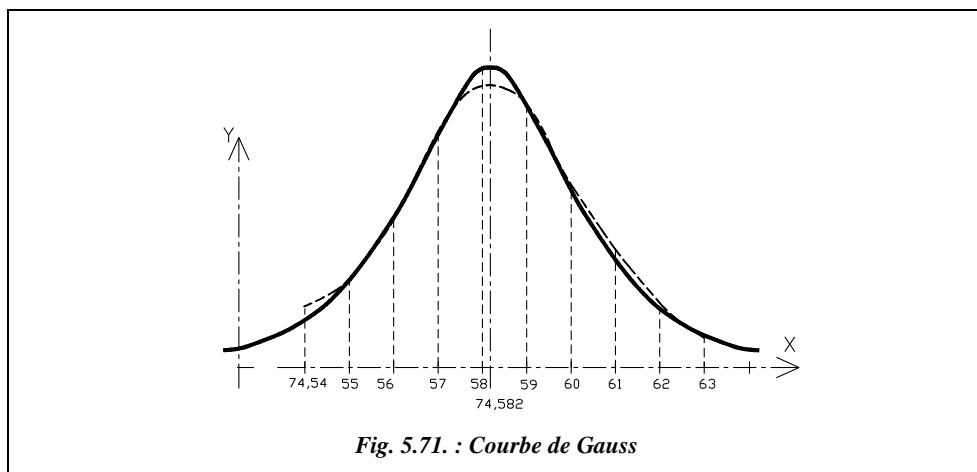
Introduction de la courbe de Gauss

Cette expérience a été faite bien souvent et les résultats sont constants : la courbe de répartition a toujours la même allure (fig. 5.71.). Les courbes obtenues dans l'étude de différents cas sont superposables par un simple changement d'échelle des abscisses et des ordonnées ; ainsi on peut représenter par la même courbe, par exemple :

- les erreurs de fermeture des triangles d'une triangulation.
- les écarts de tir à l'arc, au pistolet, etc.

Ces courbes dites « courbes de Gauss » ont la même équation, caractéristique de la loi de répartition des erreurs accidentelles :

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \text{où } x \text{ représente les valeurs possibles de la mesure, } \sigma \text{ et } \mu \text{ sont des paramètres.}$$

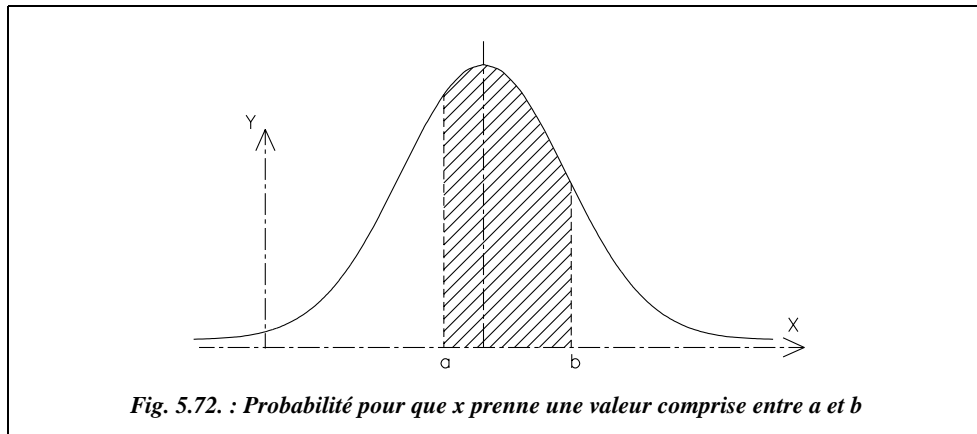


12.3.2 Hypothèse de travail

On admet qu'une mesure topométrique X est une variable aléatoire dont la loi de distribution est une loi normale de paramètres μ (valeur vraie) et σ (incertitude moyenne quadratique ou écart type) et de densité de probabilité la fonction ci-dessus (§ 12.3.1.). Ainsi la probabilité pour que la mesure X prenne une valeur comprise entre deux valeurs a et b , est l'aire comprise entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe, soit :

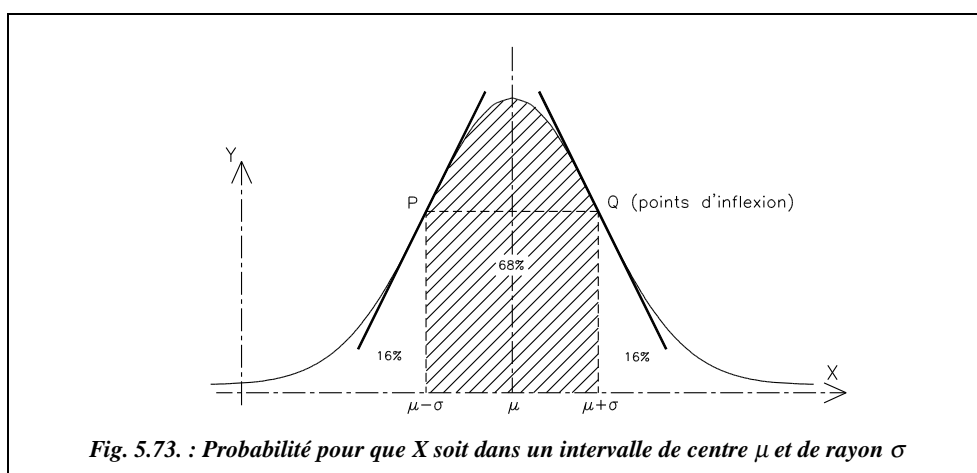
$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

Cette probabilité est donc égale à l'aire de la surface hachurée sur la figure 5.72.



La courbe théorique (courbe de Gauss) est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ (fig. 5.73.). Elle présente deux points d'inflexion (changement de courbure) Q et P d'abscisses respectives $\mu + \sigma$ et $\mu - \sigma$. σ est l'erreur moyenne quadratique d'une mesure ou écart type.

La probabilité que la mesure X soit dans l'intervalle de centre μ et de rayon σ est égale à l'aire hachurée (fig. 5.73.). Le calcul donne environ 0,68 ($\approx 2/3$).



Cela revient à dire que si l'on effectue une mesure, nous avons deux chances sur trois de trouver une erreur absolue inférieure à cette limite qu'est l'écart type.

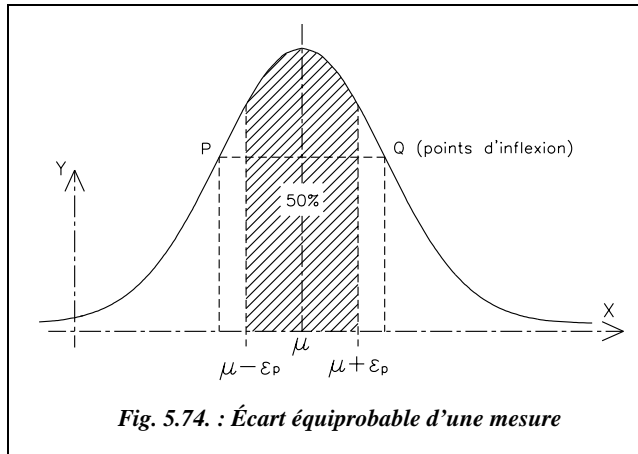
Définissons l'écart équiprobable d'une mesure, l'écart maximal d'une mesure et la distribution statistique normale.

• Écart équiprobable d'une mesure

C'est l'écart qui a une probabilité de 50 % de ne pas être dépassé en valeur absolue.

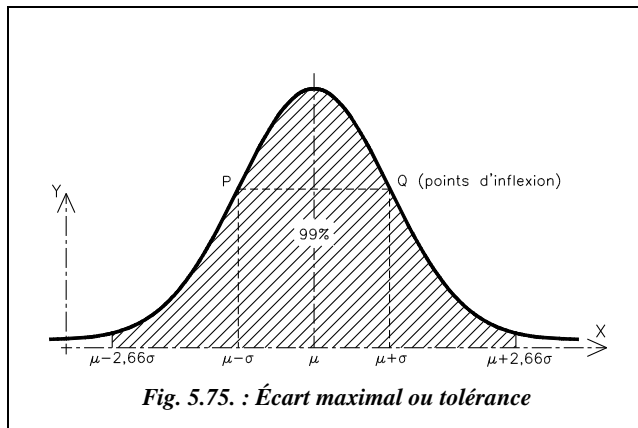
On montre que (fig 5.74.) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= 0,68 \sigma \\ \varepsilon_p &\approx 2/3 \sigma\end{aligned}$$



• Écart maximal ou tolérance d'une mesure

L'axe des abscisses étant asymptote à la courbe de Gauss, l'écart maximal est théoriquement infini puisque ce serait celui qui aurait une probabilité 100 % de ne pas être dépassé en valeur absolue. Mais il est évident qu'il n'existe pas, en réalité, de si grands écarts. En fait, il est impossible de savoir avec précision où se situe leur limite.



On fixe toutefois arbitrairement sa probabilité en convenant que l'écart maximal tolérable est celui qui a une probabilité de 99 % de ne pas être dépassé.

Le calcul montre que $\varepsilon_m = 4 \varepsilon_p \approx 2,66 \sigma$.

Cette valeur conventionnelle définit la limite au-delà de laquelle on n'a plus affaire à des erreurs mais *a priori* à des fautes.

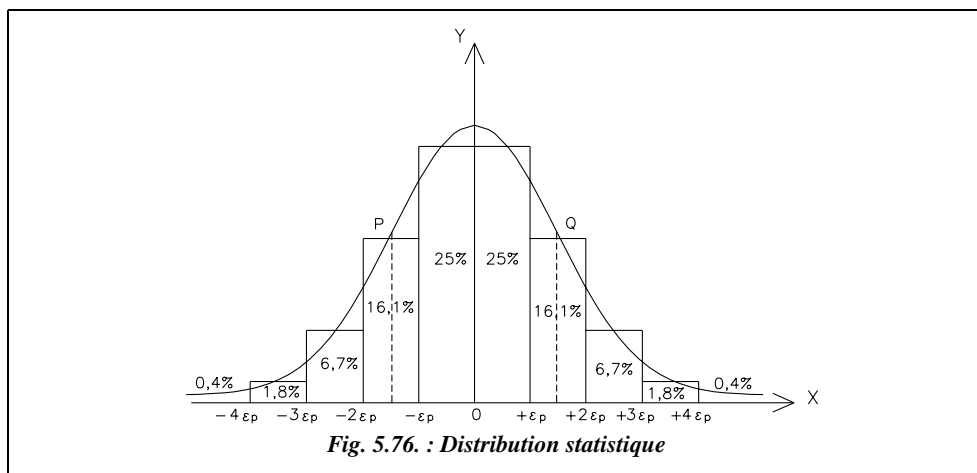
Ces valeurs (2,66 ; 0,68 ; etc.) peuvent être retrouvées dans la table de la loi normale unité de paramètres $m = 0$ et $s = 1$.

• Distribution statistique normale

Si l'on considère la distribution des erreurs en pourcentage, on peut répartir les erreurs positives, ou négatives, en cinq classes (fig. 5.76.) :

- la première contient toutes les erreurs supérieures à 0 et inférieure à ε_p (erreur probable) : elle contient 25 % des erreurs ;
- la deuxième contient toutes les erreurs comprises entre un et deux écarts probables : elle en contient 16,1 % ;
- la troisième contient toutes les erreurs comprises entre deux et trois ε_p : elle en contient 6,7 % ;
- la quatrième contient toutes les erreurs comprises entre trois et quatre ε_p : elle en contient 1,8 % ;
- la cinquième au-delà, soit 0,4 %.

En d'autres termes, les ordonnées de l'histogramme des fréquences sont proportionnelles aux nombres suivants : 25 ; 16,1 ; 6,7 ; 1,8.



Remarque

En général, les cahiers des charges des travaux de géomètre indiquent la tolérance autorisée. On peut leur reprocher de ne pas préciser le pourcentage maximal des erreurs ayant un ordre de grandeur voisin de la tolérance : on peut ainsi aboutir à de véritables contradictions. Un travail où 20 % des résultats avoisinent les limites est juridiquement correct, alors que la distribution normale indique que 3 % seulement des erreurs doivent être comprises entre trois et quatre écarts probables.

12.3.3 Valeur conventionnellement vraie

On démontre que la meilleure estimation de μ est la moyenne arithmétique des mesures effectuées qui est donnée par la formule suivante :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

On l'appelle « valeur la plus probable de la valeur vraie » ou « valeur conventionnellement vraie » mais ce n'est pas la valeur exacte – que l'on ne peut jamais connaître.

Dans l'exemple proposé, on trouve $x_m = 74,582$ m.

12.3.4 Écart type expérimental d'une mesure

L'écart type expérimental est conventionnellement noté s ; par abus de notation, il est souvent noté σ . On démontre que pour un nombre limité de mesures, sa meilleure estimation est :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$$

Déterminons l'erreur moyenne quadratique sur l'exemple précédent :

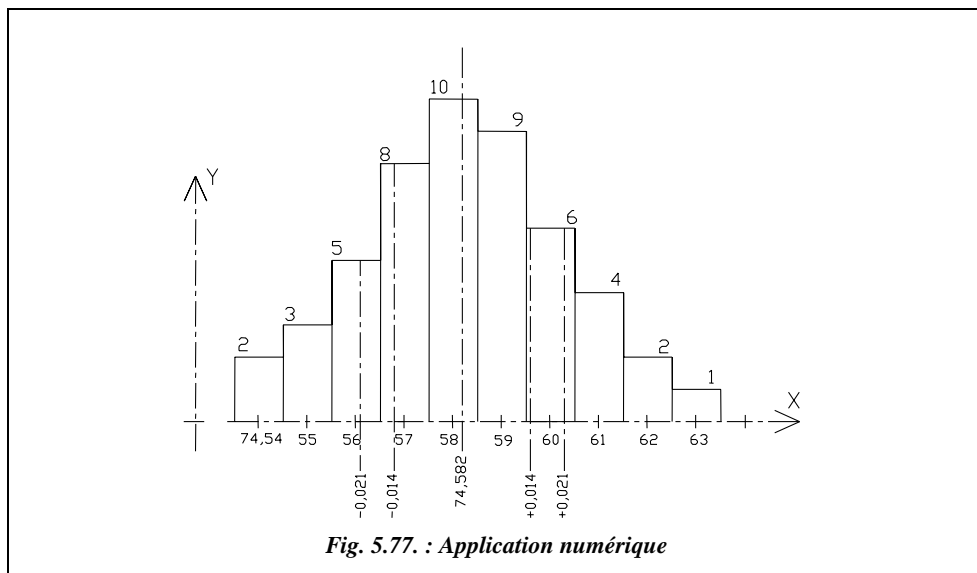
Nombre de mesures n_i	Mesures (m)	Moyenne (m)	Valeurs absolues des écarts à la moyenne (cm)	Somme des carrés des écarts
2	74,54	74,582	4,2	35,28
3	74,55		3,2	30,72
5	74,56		2,2	24,20
8	74,57		1,2	11,52
10	74,58		0,2	0,20
9	74,59		0,8	5,76
6	74,60		1,8	19,44
4	74,61		2,8	31,36
2	74,62		3,8	28,88
1	74,63		4,8	23,04
				<hr/> $\Sigma (v_i)^2 = 210,40$

L'erreur moyenne quadratique est donnée par : $s^2 = \frac{\sum v_i^2}{n-1} = \frac{210,40}{49} = 4,30$.

Donc $s = 2,1$ cm.

L'ensemble des 50 mesures de distances effectuées se résume donc à :

- la valeur la plus probable : 74,582 m
- l'écart type expérimental : s 0,021 m
- l'écart équiprobable : ε_p 0,014 m
- l'écart maximal ou tolérance : $2,7.\sigma \approx 4.\varepsilon_p$ 0,056 m



Sur l'histogramme (fig. 5.77.), traçons les droites d'abscisse $74,582 - 0,021 = 74,561$ m et $74,582 + 0,021 = 74,603$ m ; on obtient une aire d'environ : $2 + 8 + 10 + 9 + 4,8 = 33,8$ mesures sur 50, c'est-à-dire une fréquence de 67,6 %.

Entre les droites d'abscisse $74,582 - 0,014 = 74,568$ m et $74,582 + 0,014 = 74,596$ m, on obtient une aire d'environ : $5,7 + 10 + 9 + 0,5 = 25,2$ c'est-à-dire une fréquence de 50,4 %.

Entre les droites d'abscisse $75,582 - 0,056 = 75,526$ m et $75,582 + 0,056 = 75,638$ m, on trouve les 50 valeurs, c'est-à-dire une fréquence de 100 %.

On retrouve donc approximativement les valeurs théoriques de 68 % , 50 % et 99 %.

12.3.5 Incertitude sur la valeur conventionnellement vraie

Soit σ l'incertitude sur une mesure isolée. On effectue cette mesure n fois dans les mêmes conditions de manière indépendante ; l'incertitude sur la moyenne x_m de ces n mesures

est égale à : $\boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Lorsque n devient très grand, cette incertitude diminue, ce qui signifie que la valeur conventionnellement vraie x_m se rapproche de la valeur vraie μ , d'où l'intérêt de faire un grand nombre de mesures.

12.3.6 Théorie des erreurs accidentelles des mesures indirectes

En topométrie, il est fréquent d'effectuer plusieurs mesures directes pour connaître notamment une distance, une dénivelée. Ces mesures sont additionnées comme la somme de dénivelées ou font l'objet de produits comme la distance horizontale et la dénivelée à partir de la distance inclinée et de l'angle vertical.

12.3.6.1 Théorème

Les erreurs sont suffisamment petites pour être considérées comme des infiniment petits du premier ordre et permettre de négliger leurs carrés ou leurs produits, c'est-à-dire les infiniment petits du deuxième ordre.

◆ Énoncé du théorème

L'erreur sur une fonction de plusieurs variables est la différentielle totale de la fonction, les différentielles des variables représentant les erreurs sur celles-ci.

◆ Démonstration de ce théorème

On note $F = f(X, Y, Z)$ où F inconnue est donnée en fonction des mesures directes X, Y, Z . On note dX, dY, dZ les erreurs des variables X, Y, Z . On a :

$$F + dF = f(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$$

En développant par la formule de Taylor, on obtient :

$$F + dF = f(X, Y, Z) + \frac{dX}{1!} f'_X + \frac{dX^2}{2!} f''_{XX} + \dots + \frac{dY}{1!} f'_Y + \frac{dY^2}{2!} f''_{YY} + \dots + \frac{dZ}{1!} f'_Z + \frac{dZ^2}{2!} f''_{ZZ} + \dots$$

En négligeant les termes de second ordre, on obtient :

$$F + dF \approx f(X, Y, Z) + f'_X \cdot dX + f'_Y \cdot dY + f'_Z \cdot dZ$$

D'où : $\boxed{dF \approx f'_X \cdot dX + f'_Y \cdot dY + f'_Z \cdot dZ}$

On remarque que l'influence d'une erreur sur le résultat est indépendante de l'influence de toutes les autres erreurs. En effet, l'influence de l'erreur dX sur le résultat est $f'_X \cdot dX$, c'est-à-dire la valeur qui représente la variation de la fonction F quand X varie seule ($dY = dZ = 0$).

12.3.6.2 Loi de composition

C'est la loi reliant l'erreur commise sur le résultat d'un mesurage indirect d'une grandeur aux erreurs commises lors des mesurages directs des grandeurs composantes.

Soit $F = f(X, Y, Z)$ où F inconnue est donnée en fonction des mesures directes X, Y, Z et dX, dY, dZ qui sont les erreurs sur les variables X, Y, Z . Le théorème du paragraphe 12.3.6.1. donne : $dF \approx f'_X \cdot dX + f'_Y \cdot dY + f'_Z \cdot dZ$.

En pratique, cette formule sert généralement à calculer l'erreur systématique dF sur F si dX, dY, dZ représentent les erreurs systématiques respectives de X, Y, Z ; les produits $f'_X \cdot dX, f'_Y \cdot dY$ et $f'_Z \cdot dZ$ sont les erreurs partielles qui résultent de l'erreur commise sur une grandeur composante. Lorsque les erreurs systématiques ont été éliminées, l'incertitude de mesurage sur X , par exemple, est accidentelle : elle obéit au hasard, elle est tantôt positive, tantôt négative, et après étude de l'instrument utilisé on connaît son écart type σ_X ; de même, on connaît σ_Y et σ_Z . Considérons les n déterminations suivantes de F :

$$F_1 = f(X_1, Y_1, Z_1)$$

$$F_2 = f(X_2, Y_2, Z_2)$$

$$\overline{F_n = f(X_n, Y_n, Z_n)}$$

Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n suivent la même loi puisque ce sont n mesures de la même grandeur. Il en va de même pour Y_1, Y_2, \dots, Y_n et pour Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

Soit dF_1, dF_2, \dots, dF_n les erreurs accidentelles vraies (inconnues) commises dans les mesures. On démontre que pour un très grand nombre de mesures (n tendant vers

l'infini), l'erreur moyenne quadratique ou écart type σ_F de F vaut : $\sigma_F = \sqrt{\frac{\sum dF_i^2}{n}}$.

Or $dF_i \approx f'_X \cdot dX_i + f'_Y \cdot dY_i + f'_Z \cdot dZ_i$; en élevant au carré et en faisant la somme puis en divisant par n , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\sum dF_i^2}{n} &= (f'_X)^2 \frac{\sum dX_i^2}{n} + (f'_Y)^2 \frac{\sum dY_i^2}{n} + (f'_Z)^2 \frac{\sum dZ_i^2}{n} \\ &\quad + 2f'_X \cdot f'_Y \frac{\sum dX_i \cdot dY_i}{n} + 2f'_Y \cdot f'_Z \frac{\sum dY_i \cdot dZ_i}{n} + 2f'_Z \cdot f'_X \frac{\sum dZ_i \cdot dX_i}{n} \end{aligned}$$

Les doubles produits de la forme $\frac{\sum dX_i \cdot dY_i}{n}$ sont des quantités petites.

De plus, le signe des termes $dX_i \cdot dY_i$ ne peut être précisé puisque dX_i et dY_i sont des erreurs accidentelles ; la somme $\sum dX_i \cdot dY_i$ est donc composée de termes de même ordre de grandeur dont les signes sont distribués au hasard et dont, par conséquent, la somme a tendance à s'annuler (en probabilité). En revanche, les termes de la somme $\sum dX_i^2$ sont

tous positifs ; par définition, $\sqrt{\frac{\sum dX_i^2}{n}}$ est l'écart type σ_X de la mesure X .

On peut donc négliger les doubles produits par rapport aux termes quadratiques, d'où :

$$\sigma_F^2 \approx (f'_X)^2 \cdot \sigma_X^2 + (f'_Y)^2 \cdot \sigma_Y^2 + (f'_Z)^2 \cdot \sigma_Z^2$$

12.3.6.3 Précision d'un instrument de mesure

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que σ_X est l'écart type de la mesure directe X après étude de l'instrument. En effet, nous n'allons pas réitérer n mesures de X , de Y , de Z etc. pour en déduire leur écart type. Les écarts types choisis caractérisent la précision de l'instrument de mesure utilisé ; le constructeur étudie l'instrument en effectuant un certain nombre de mesures (comme réalisé au paragraphe 12.3.4.) dans des conditions précises et normalisées par exemple par les normes *DIN 18723*.

Par exemple, pour les théodolites, le constructeur effectuera quatre séries de mesures par différentes conditions météorologiques ; une série de mesures comprendra trois groupes de mesures à des distances comprises entre 100 et 250 m ; les visées sont voisines de l'horizontale ; dans chaque groupe on pratique cinq mesures de direction en position I de la lunette et cinq en position II ; on fait tourner le cercle gradué entre chaque groupe de mesures d'environ 67 gon pour les théodolites optico-mécaniques, on le fait tourner sur son embase d'environ 133 gon ou on change sa position sur son trépied dans le cas de théodolites électroniques, etc.

Après plusieurs années d'utilisation, le topomètre détermine lui-même la précision pratique de son instrument : « l'écart type pratique » pourra alors être deux à trois fois supérieurs à « l'écart type constructeur » (précision deux à trois fois moins bonne). Par exemple, pour le Wild T2, le constructeur donne $\sigma = \pm 2,5$ dmgon sur une visée ; usuellement on admet $\sigma = \pm 5$ à 6 dmgon.

Les écarts types suivants sont donnés par les constructeurs pour les appareils les plus courants :

- théodolites : écart type sur la direction horizontale et sur l'angle vertical ;
- niveaux : écart type d'un cheminement avec double nivellement sur 1 km ;
- distancemètres : écart type sur la distance inclinée suivant la visée, en millimètre et ppm (partie par millions ou mm par km).

12.3.6.4 Écart type d'une somme algébrique

Soit la fonction : $F = X + Y - Z$. On remarque que : $f'_X = f'_Y = -f'_Z = 1$. Donc la loi de composition donne : $\sigma_F^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2$; d'où :

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}$$

Quand les termes de la somme algébrique ont la même précision σ , s'il y a n termes :

$$\sigma_F = \sigma\sqrt{n}$$

12.3.6.5 Écart type d'un produit

Soit la fonction : $F = X \cdot Y$; on a : $f'_X = Y$ et $f'_Y = X$.

Donc : $\sigma_F^2 = \sigma_X^2 \cdot Y^2 + \sigma_Y^2 \cdot X^2$ soit :

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_X^2 \cdot Y^2 + \sigma_Y^2 \cdot X^2}$$

12.3.6.6 Écart type d'un produit de fonctions

Soit la fonction $F = f(X) \cdot g(Y)$, la dérivée de F par rapport à X est $f'_X \cdot g(Y)$. De même, la dérivée de F par rapport à Y est $g'_Y \cdot f(X)$.

D'où :

$$\sigma_F^2 = (f'_X)^2 \cdot (g(Y))^2 \cdot \sigma_X^2 + (g'_Y)^2 \cdot (f(X))^2 \cdot \sigma_Y^2$$

Exemple : pour $F = X \cdot \sin Y$ on obtient $\sigma_F^2 = \sigma_X^2 \cdot \sin^2 Y + \sigma_Y^2 \cdot X^2 \cdot \cos^2 Y$.

12.4 Applications

12.4.1 Triangulation

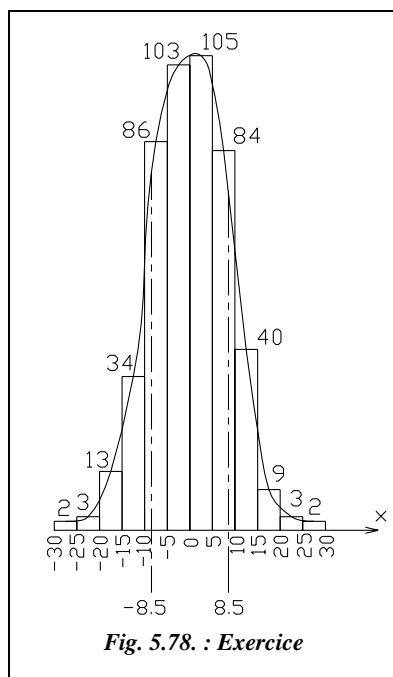
Dans cet exercice, nous étudions l'erreur de fermeture angulaire de 484 triangles de l'ancienne triangulation de la France. On a obtenu :

- 243 erreurs de fermetures positives ;
- 241 erreurs de fermetures négatives ;
- la somme des erreurs positives est égale à 1 614,4 dmgon ;
- la somme des erreurs négatives est égale à 1 611,2 dmgon.

La répartition est donnée par le tableau suivant : par exemple, 34 erreurs négatives sont comprises entre 10 et 15 dmgon.

0 dmgon	5	10	15	20	25	30
+	105	84	40	9	3	2
-	103	86	34	13	3	2

Pour représenter graphiquement cette répartition (fig. 5.78.), on porte sur un axe horizontal les divisions -30 dmgon, -25 , ..., 0 , ..., $+25$, $+30$ dmgon et on construit sur chaque base un rectangle ayant pour hauteur le nombre des erreurs : la surface de ces rectangles est donc proportionnelle au nombre des erreurs.



Énoncé

Déterminez la courbe laissant des aires égales à l'intérieur et à l'extérieur de chaque rectangle. L'écart type est de $8,5$ dmgon (on ne peut le calculer ici car on n'a pas les écarts exacts mais des « fourchettes d'écarts » : on obtiendrait $8,7$ dmgon en prenant les écarts moyens : $2,5$; $7,5$; $12,5$; $17,5$; $22,5$; $27,5$ dmgon). Vérifiez graphiquement que l'aire encadrée par les droites d'abscisse $+8,5$ et $-8,5$ mgon est de 68% et qu'il reste 16% de part et d'autre.

Réponse

L'aire délimitée par la courbe (fig. 5.78.) est de 2420 unités².

L'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'abscisse $-8,5$ et $+8,5$ mgon et la courbe est de 68% (1640 unités²).

Les droites d'abscisse $-8,5$ et $+8,5$ mgon ne passent pas exactement par les points d'inflexion de cette courbe car, le nombre d'essais étant petit, la courbe n'est pas exactement identique à la courbe théorique.

12.4.2 Résolution de triangle

Énoncé

Dans un triangle de sommets A , B , C et de côtés opposés respectifs a , b et c , on connaît :

- $c = 2\,653,24$ m ;
- $\hat{A} = 58,5287$ gon ;
- $\hat{B} = 65,8652$ gon ;
- $\sigma_{\hat{A}} = 5$ dmgon ;
- $\sigma_{\hat{B}} = 5$ dmgon ;
- $\sigma_c = 12$ cm.

Déterminez l'écart type sur les côtés a et b , calculés à partir des données précédentes.

Réponse

Les relations suivantes donnent a et b : $a = c \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\hat{A} + \hat{B})}$ et $b = c \frac{\sin \hat{B}}{\sin(\hat{A} + \hat{B})}$

On obtient donc, après simplifications :

$$(\sigma_a)^2 = \left[\sigma_c \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\hat{A} + \hat{B})} \right]^2 + \left[c \frac{\sin \hat{B}}{\sin^2(\hat{A} + \hat{B})} \sigma_{\hat{A}} \right]^2 + \left[c \frac{\sin \hat{A} \cdot \cos(\hat{A} + \hat{B})}{\sin^2(\hat{A} + \hat{B})} \sigma_{\hat{B}} \right]^2.$$

On obtient une relation identique pour σ_b en permutant \hat{A} et \hat{B} .

Application numérique : $\sigma_a = 10,4$ cm et $\sigma_b = 11,2$ cm.

Le terme prépondérant est ici l'écart type de mesure de la base c . Finalement, on peut écrire :

$$a = 2\,274,88 \text{ m} \pm 10 \text{ cm} ; b = 2\,459,23 \text{ m} \pm 11 \text{ cm} ; \hat{C} = 75,6061 \text{ gon} \pm 7 \text{ dmgon}.$$

12.4.3 Nivellement trigonométrique

Énoncé

La dénivellée entre deux points A et B a été mesurée par nivellement trigonométrique.

On connaît : $\sigma_D = 2$ cm , $\sigma_V = 2$ mgon et $\sigma_{ht} = \sigma_{hr} = 5$ mm.

Déterminez l'écart type sur cette dénivellée.

Les observations sont les suivantes :

Stations	Points visés	D_i (m)	V (gon)	h_r (m)	ΔH
A ($h_i = 1,530$ m)	B	325,620	98,9542	1,600	5,279
B ($h_i = 1,559$ m)	A	325,582	101,0250	1,600	5,283

Réponse

L'écart type sur la dénivellée est déterminé comme suit :

- dénivellée de A vers B : $\Delta H_{A \rightarrow B} = H_B - H_A = ht + Di \cdot \cos V - hr$
 $(\sigma_{\Delta H_{A \rightarrow B}})^2 = (\sigma_{ht})^2 + (\sigma_D \cdot \cos V)^2 + (Di \cdot \sin V \cdot \sigma_V)^2 + (\sigma_{hr})^2 = 12,4$ mm.
- dénivellée de B vers A : même calcul avec les valeurs lues en station en B :
 $\sigma_{\Delta H_{B \rightarrow A}} = 12,4$ mm.
- dénivellée moyenne : $\Delta H_{AB} = (\Delta H_{A \rightarrow B} - \Delta H_{B \rightarrow A}) / 2$ et $(\sigma_{\Delta H}) = 12,4 / \sqrt{2} \approx 9$ mm.

Le terme prépondérant de ces incertitudes est l'écart type sur la lecture angulaire de l'angle zénithal V .

Finalement, on peut écrire: $\Delta H_{AB} = 5,282 \text{ m} \pm 9 \text{ mm}$.

12.4.4 Polygonation

Énoncé

Un opérateur effectue une polygonation pour laquelle la précision exigée est :

- angle donnés à ± 2 mgon près.
- précision relative en distance : 1/5 000.

L'opérateur ne dispose que d'un théodolite dont l'écart type constructeur sur une visée est de 3 mgon et d'un ruban de 100 m de classe II et d'écart type 2 cm.

Déterminez combien de fois il lui faudra réitérer chaque mesure d'angle et de distance pour obtenir la précision exigée, la distance entre sommets étant de 80 m. Même question avec un ruban de 50 m de même écart type.

Réponses

- Un angle H_z est issu à chaque sommet de deux lectures angulaires effectuées avec un écart type de 3 mgon. L'écart type sur la mesure d'un angle est donc de $3 \cdot \sqrt{2} = 4,2$ mgon. Pour obtenir un écart type de 2 mgon, il faut répéter cinq fois ($n = 4,2^2 / 2^2$) la lecture de chaque angle, donc il faut dix lectures angulaires par station ou par exemple cinq paires de séquences.
- Pour une distance moyenne de 80 m entre sommets, l'écart type autorisé est de (80 / 5 000) soit 1,6 cm. Avec un ruban de 100 m et d'écart type 2 cm, il faut répéter chaque mesure linéaire deux fois ($2^2 / 1,6^2$).
- Si le ruban est limité à 50 m, chaque mesure demande deux portées, l'écart type de chaque mesurage est donc de : $2 \cdot \sqrt{2} = 2,8$ cm, valeur à laquelle il faut théoriquement ajouter une erreur d'alignement. Il faut alors répéter chaque mesurage trois à quatre fois ($2,8^2 / 1,6^2$).

